



南京邮电大学 2024/2025 学年第二学期

《算法分析与设计》期末试卷 (B)

院(系)_____ 班级_____ 学号_____ 姓名_____

题号	一	二	三	四	总分
得分					

得分

一、计算题 (10 分)

求下面程序中划线语句的执行次数 (请给出求的过程), 并计算它的渐近时间复杂度。

```
float range=1;
float sum=0;
float n;
while(range>1/n)
{
    sum=sum+range;
    range=range/2;
}
```

得分

二、简答题 (10 分)

采用分治法求解问题, 通常是将规模为 n 的问题分成 a 个规模为 n/b 的子问题递归求解, 且问题分解、合并过程中的时间耗费为 cn^k 。

则所需时间可以表示为递推式: $T(n) = \begin{cases} c & n = 1 \\ aT(n/b) + cn^k & n > 1 \end{cases}$

该递推式最终求解得到总的时间复杂度为: $T(n) = \begin{cases} \theta(n^{\log_b a}) & \text{如果 } \log_b a > k \\ \theta(n^k \log n) & \text{如果 } \log_b a = k \\ \theta(n^k) & \text{如果 } \log_b a < k \end{cases}$

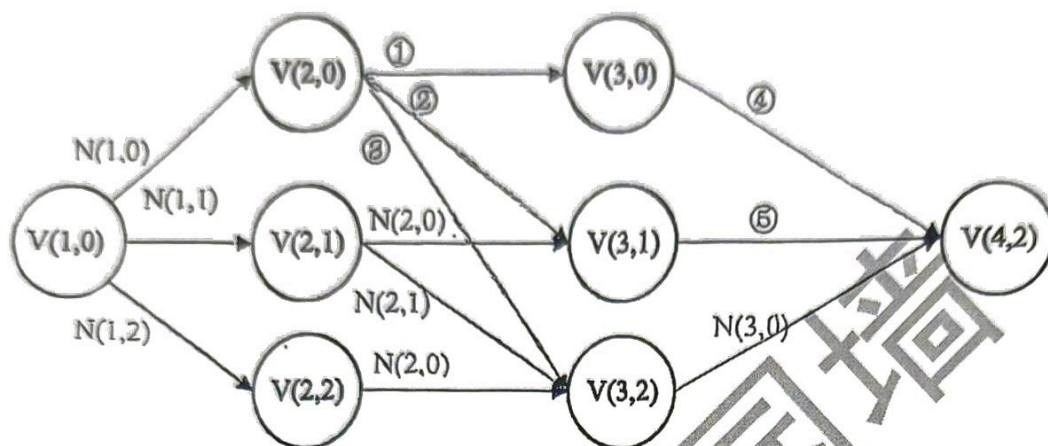
若希望进一步降低总的时间复杂度数量级, 可以有什么样的改进思路?

自觉遵守考试规则, 诚信考试, 绝不作弊



三、算法题（本大题共5小题，共60分）

1. (10分) 已知为第 i 个项目分配 j 个资源可以获得收益 $N(i,j)$ 。若现在一共有3个项目和2个可供分配的资源，想要求总收益最大的资源分配方案，将该资源分配问题的求解过程可描述为下图所示有4个阶段的多段图。其中每个多段图顶点 $V(k,n)$ 表示：到当前第 k 个阶段的顶点，已有 n 个资源被分配。请补充完成图中每一条边的权值。



2. (10分) 有 0/1 背包实例 $(w_0, w_1, w_2, w_3) = (5, 3, 2, 4)$, $(p_0, p_1, p_2, p_3) = (6, 5, 4, 3)$ 。背包载重 $M=7$ 。取最优解下界估计值（阈值）为物品0和物品2放入背包时的收益 $L=10$ ，来对阶跃点进行筛选。要求用启发式方法求最佳装载方案。

(1) 请计算出 $1 \leq i \leq 3$ 时的 $\text{ProfLeft}(i)$ ，并写出动态规划法求解所生成的所有阶跃点集合 S^0, S^1, S^2, S^3 。

(2) 请给出最优解值（即：背包最大收益）和最优解 (x_0, x_1, x_2, x_3) 。

3. (15分) 找换硬币问题中，硬币面值按照非增次序存放在 `penny` 数组中。整数 `aim` 代表要剩余要兑换的钱数。解向量是一个可变长度 k -元组 $(x_0, x_1, \dots, x_k)$ ，其中 x_i 为每次选择兑换的货币面值在 `penny[]` 数组中的下标。

要求：按照从前往后的硬币面值进行兑换，每种面值的硬币可以兑换任意张。

例如：实例硬币面值 `penny[] = {4, 3, 2}`，要兑换的总钱数为 `aim=10`，则 $(0, 1, 1)$ 是一个可行解，表示兑换一个下标为0的（面值4）和两个下标为1的（面值3）。

为状态空间树设计的剪枝函数为 `penny[x_k] <= aim`。即：求解过程中随着 x_i 解分量的产生，剩余还未兑换的钱数 `aim` 不断减少。当要选取的货币面值 > 剩余还未兑换的钱数时剪枝。

(1) 请画出用回溯法求解时，上述实例 `penny[] = {4, 3, 2}`，`aim=10` 实际生成的状态空间树。（请在每条边旁边注明 x_i 的值，在每一个可行解下面注明 `ans`。）

(2) 请给出所有可行解。

4. (15分) 带时限的作业排序问题有 $n=3$ 个作业, 各作业所需处理时间为 $(t_0, t_1, t_2) = (2, 1, 3)$, 要求的时限为 $(d_0, d_1, d_2) = (2, 3, 4)$, 若能在时限内完成可获得收益 $(p_0, p_1, p_2) = (3, 2, 4)$ 。求使得入选子集的作业都能按时完成, 且能获得最大收益的最优解。

(1) 要求画出 FIFO 分枝限界法所实际生成的那部分状态空间树。

注意要求:

- 用可变长度元组解来表示最优解, 其中每个解分量 x_i 为入选子集的作业下标, 在状态空间树中应标明。
- 请在状态空间树中的结点旁标注该结点对应的损失下界 $\hat{c}$ 和损失上界 $\bar{u}$ 。若上界变量值 U 进行了更新则也应标注。(上界变量 U 记录迄今为止已知的最小损失的上界值, 对所有 $\hat{c} \geq U$ 的结点均可剪枝。)
- 被剪枝的结点不要画, 图中只画实际生成的结点。
- 请在每条边旁边注明 x_i 的值, 在最优解下面注明 ans。

(2) 求问题的最优解值 (最大作业收益) 和最优解。

5. (10分) RSA 算法中用扩展欧几里得算法, 为公开密钥 e 求得 e 关于模 $\Phi(n)$ 的乘法逆元 d , 即 $ed \equiv 1 \pmod{\Phi(n)}$ 。若 $e=13$, $\Phi(n)=60$, 求 d 的值并写出求解过程。

得分

四、综合题 (本大题 20 分)

有 n 个孩子站成一排, 按以下要求为他们分发糖果:

每个孩子至少分到 1 颗糖果, 且每个孩子有一个评分 $\text{ratings}[i]$, 如果某个孩子的评分比相邻的孩子高, 那么他必须得到比相邻孩子更多的糖果。问最少需要准备多少颗糖果?

例如: 有 3 个孩子, 他们的评分为 $\text{ratings}[] = \{1, 0, 2\}$, 则分别为他们发 (2, 1, 2) 颗糖果, 最少需要准备 5 颗糖果。

(1) 请给出该问题的贪心法求解策略。提示: 本题采用双向贪心策略设计, 结合局部最优和双向约束处理。

(2) 补充完整下面程序, 使其正确输出最少需要的糖果数量。

(3) 请分析该算法的渐近时间复杂度, 并判断此问题是 P 类还是 NP 类问题。

```
int main()
{
    int ratings[] = { 1, 0, 2 };
    int n = sizeof(ratings) / sizeof(int);    //size个孩子
    int candies[] = { 1, 1, 1 }; //初始化candies数组, 默认每个孩子发1个糖果
    for (int i = 0; i < n - 1; i++) //从左到右, 确保右边高分孩子比左边糖果多
    {
        if ( _____ ① _____ )
            _____ ② _____;
    }
}
```

```
for (int i = n - 1; i > 0; i--)    //从右到左，确保左边高分孩子比右边糖果多
{
    if ( _____ ③ _____ )
        if (candies[i - 1] < candies[i] + 1)
            _____ ④ _____ ;
}
int sum = 0;
for (int i = 0; i < n; i++)    //计算总糖果数
    _____ ⑤ _____ ;
printf("最少需要的糖果数是: %d", sum);
return 0;
}
```

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊
装订线内不要答题

南邮校园墙