

《高等数学 A(1)上》期末试卷

新学号 _____ 原学号 _____ 姓名 _____ 学院 _____

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

一、选择题 (本大题分 5 小题, 每题 3 分, 共 15 分)

1. 已知 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ 则 $f'(0) =$ ()

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 不存在

2. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 与 x^2 等价的无穷小量是 ()

(A) $\arcsin x + x^2$ (B) $1 - e^{x^2}$ (C) $\int_0^x e^{(1+t)} dt$ (D) $\sqrt[3]{1+x^3} - 1$

3. 设函数 $f(x)$ 的一个原函数为 $\arctan x$, 则 $\int x f(1-x^2) dx =$ ()

(A) $\frac{1}{2} \frac{1}{1+(1-x^2)^2}$ (B) $\frac{1}{2} \frac{1}{1+(1-x^2)^2}$
(C) $\frac{1}{2} \arctan(1-x^2) + C$ (D) $-\frac{1}{2} \arctan(1-x^2) + C$

4. 设在区间 $[a, b]$ 上 $f(x) > 0, f'(x) < 0, f''(x) > 0$, 令 $S_1 = \int_a^b f(x) dx$,

$S_2 = f(b)(b-a), S_3 = \frac{1}{2}[f(b) + f(a)](b-a)$, 则有 ()

(A) $S_1 < S_2 < S_3$ (B) $S_1 < S_3 < S_2$ (C) $S_1 < S_2 < S_3$ (D) $S_2 < S_1 < S_3$

5. 微分方程 $y'' + 4y = \cos^2 x$ 的通解形式为 ()

(A) $(A \cos 2x + B \sin 2x)^2$ (B) $A \cos 2x + B \sin 2x + C$
(C) $x(A \cos 2x + B \sin 2x) + C$ (D) $x^2(A \cos 2x + B \sin 2x) + C$

二、填空题 (本大题分 5 小题, 每题 4 分, 共 20 分)

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{n} =$ _____

2. 函数 $y = x e^x$ 的拐点为 _____

3. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{x \sin^2 x}{1+x^2} + \cos^2 2x \right) dx =$ _____

4. f'' 又积分 $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx =$ _____

5. 微分方程 $(y+x')dx - 2xydy = 0$ 满足初始条件 $y(1) = \frac{6}{5}$ 的特解为 _____

三、计算下列极限 (本题 7 分)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right)^{\frac{1}{x}}$

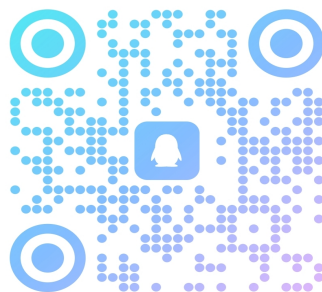
四、(本题 9 分)

设 D_1 是由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $x=a, x=1$ 及 $y=0$ 所围成的平面区域, D_2 是由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $y=0, x=a$ 所围成的平面区域, 其中 $0 < a < 1$.

- 试求 D_1 绕 x 轴旋转所得旋转体体积 V_1 ; D_2 绕 y 轴旋转所得旋转体体积 V_2 .
- 问 a 为何值时, $V_1 + V_2$ 取得最大值? 并求此最大值.



南邮校园墙2
QQ: 3399587948



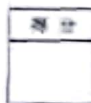
扫一扫加我为好友



五、解答题 (本题分2小题, 每小题7分, 共14分)

1. 设 $\begin{cases} x = a(1 - \sin^3 t), \\ y = a \cos^3 t, \end{cases} (a \neq 0)$, 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.

2. 设 $y = y(x)$ 由方程 $e^x - e^y - \cos(xy) + e = 0$ 确定, 求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}, \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=0}$.



六、计算下列积分(本题分2小题, 每题7分, 共14分)

1. $\int e^x \sin x dx$

2. $\int_0^a \frac{1}{x + \sqrt{a^2 - x^2}} dx (a > 0)$



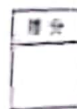
七、(本题8分) 求微分方程 $y'' - 6y' + 8y = xe^{2x}$ 满足 $y(0) = \frac{1}{8}, y'(0) = \frac{1}{2}$ 的

特解



八、(本题8分)

证明: 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $\sin x + \tan x > 2x$.



九、(本题5分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 xf(x) dx$.

证明: 至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使 $\int_0^\xi f(x) dx = 0$.

一、选择题+填空题

1. BCDBC

1. $\frac{2}{\pi}$ 2. $(2, \frac{2}{e^2})$, 凸区间 $(-\infty, 2]$ 3. $\frac{\pi}{4}$ 4. -4

5. $y = \sqrt{x} + \frac{x^3}{5}$

得分

三、计算下列极限 (本题 7 分)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right)^{\frac{1}{x}}$$

解: 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \ln \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right)}$ 2'

由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left[\frac{\ln(1+x)}{x} - 1 \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$$
3'

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x} = -\frac{1}{2}$$

原式 $= e^{-\frac{1}{2}}$ 2'

得分

四、解答题 (本题分 2 小题, 每小题 7 分, 共 14 分)

1. 设 $\begin{cases} x = a(1 - \sin^3 t) \\ y = a \cos^3 t \end{cases} \quad (a \neq 0)$, 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}$.

解: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{-3a \cos^2 t \sin t}{-3a \sin^2 t \cos t} = \cot t$,3'

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d(\frac{dy}{dx})/dt}{dx/dt} = \frac{-\csc^2 t}{-3a \sin^2 t \cos t} = \frac{1}{3a \sin^4 t \cos t}$$
4'

2. 设 $y = y(x)$ 由方程 $e^x - e^y - \cos(xy) + e = 0$ 确定, 求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}, \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0}$.

解：方程两边对 x 求导，得到 $e^y - e^y \cdot y' + \sin(xy)(y + xy') = 0$ (1)

将 $x=0, y=1$ 代入(1)式，得 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = \frac{1}{e}$ 3'

(1)式两端再对 x 求导，得到

$$e^y - e^y (y')^2 - e^y y'' + \cos(xy)(y + xy')^2 + \sin(xy)(2y' + xy'') = 0 \quad (2)$$

将 $x=0, y=1, \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = \frac{1}{e}$ 代入(2)式，得 $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=0} = \frac{2}{e} - \frac{1}{e^2}$ 4'

得分

五、计算下列积分(本题分2小题，每题7分，共14分)

1. $\int e^x \sin x dx$

解：原式 $= \int \sin x de^x = e^x \sin x - \int e^x d\sin x = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$ 2'

$$= e^x \sin x - \int \cos x de^x = e^x \sin x - e^x \cos x + \int e^x d\cos x$$

$$= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx \quad \text{.....3'}$$

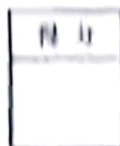
$$\text{故原式} = \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2} + C \quad \text{.....2'}$$

2. $\int_0^a \frac{1}{x + \sqrt{a^2 - x^2}} dx \quad (a > 0)$

解：令 $x = a \sin t$ ，则 原式 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t} dt$ 2'

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin u}{\cos u + \sin u} (-du) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{\sin u + \cos u} du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sin t + \cos t} dt \quad \text{.....3'}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos t}{\sin t + \cos t} + \frac{\sin t}{\sin t + \cos t} \right) dt = \frac{\pi}{4} \quad \text{.....2'}$$



六、(本题9分)

设 D_1 是由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $x=a, x=2$ 及 $y=0$ 所围成的平面区域; D_2

是由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $y=0, x=a$ 所围成的平面区域, 其中 $0 < a < 2$.

(1) 试求 D_1 绕 x 轴旋转所得旋转体体积 V_1 ; D_2 绕 y 轴旋转所得旋转体体积 V_2 ;

(2) 问 a 为何值时, $V_1 + V_2$ 取得最大值? 并求此最大值.

解: (1) $V_1 = \pi \int_a^2 (2x^2) dx = \frac{4\pi}{5} (32 - a^5) \dots\dots 3'$

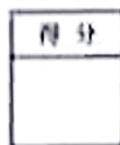
$$V_2 = \pi \int_0^{2a^2} a^2 dy - \pi \int_0^{2a^2} x^2 dy = \pi a^2 \cdot 2a^2 - \pi \int_0^{2a^2} \frac{y}{2} dy$$

$$= 2\pi a^4 - \pi a^4 = \pi a^4.$$

或 $V_2 = 2\pi \int_0^a x(2x^2) dx = \pi a^4, \dots\dots 3'$

(2) 设 $V = V_1 + V_2 = \frac{4\pi}{5} (32 - a^5) + \pi a^4$. 由 $V' = 4\pi a^3 (1 - a) = 0$ 得 $(0, 2)$ 内的唯一驻点 $a = 1$. 当 $0 < a < 1$ 时, $V' > 0$; 当 $a > 1$ 时, $V' < 0$. 因此 $a = 1$ 是极大值点即最大值

点, 此时 $V = V_1 + V_2$ 取得最大值, 等于 $\frac{129}{5}\pi, \dots\dots 3'$



七、(本题8分) 求微分方程 $y'' - 6y' + 8y = xe^{2x}$ 满足 $y(0) = \frac{1}{8}, y'(0) = \frac{1}{2}$ 的特解.

解: 特征方程: $r^2 - 6r + 8 = 0$, 特征根 $r_1 = 2, r_2 = 4$,

对应齐次方程的通解为

$$Y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x}. \dots\dots 3'$$

$\lambda = 2$ 是特征方程的单根, 设特解 $y_2^* = x(Bx + C)e^{2x}$, 代入原方程, 整理得

$$-4Bx + (2B - 2C) = x,$$

解得 $B = -\frac{1}{4}, C = -\frac{1}{4}$. 故特解为 $y_2^* = -\frac{1}{4}(x^2 + x)e^{2x}$.

于是方程通解为

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x} - \frac{1}{4}(x^2 + x)e^{2x}, \quad \dots\dots 3'$$

将 $y(0) = \frac{1}{8}, y'(0) = \frac{1}{2}$ 代入得 $\begin{cases} C_1 + C_2 = \frac{1}{8}, \\ C_1 + 2C_2 = \frac{3}{8}, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} C_1 = -\frac{1}{8}, \\ C_2 = \frac{1}{4}, \end{cases}$

所求特解为

$$y = -\frac{1}{8}e^{2x} + \frac{1}{4}e^{4x} - \frac{1}{4}(x^2 + x)e^{2x}, \quad \dots\dots 2'$$

得分

八、(本题 8 分)

证明: 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $\sin x + \tan x > 2x$

证明: 令 $f(x) = \sin x + \tan x - 2x$, 则

$$f'(x) = \cos x + \sec^2 x - 2,$$

$$f''(x) = -\sin x + 2\sec x \sec x \tan x = \sin x \left(\frac{2}{\cos^3 x} - 1 \right) > 0, \quad \dots\dots 5'$$

所以, 函数 $f'(x)$ 单调增加. 由于 $f'(0) = 0$, 于是在 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 上, $f'(x) > 0$,

所以 $f(x)$ 在 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 上单调增加. 又由于 $f(0) = 0$, 从而在 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 上,

$$f(x) > 0, \text{ 即 } \sin x + \tan x > 2x \quad \dots\dots 3' \quad \text{证毕}$$

得分

九、(本题 5 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 xf(x) dx$,

证明: 至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使 $\int_0^{\xi} f(x) dx = 0$.

$$\text{证明: 令 } F(x) = \int_0^x (x-t)f(t)dt, \quad \dots\dots 2'$$

则 $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导. 又 $F(0) = 0, F(1) = 0$. 由罗尔定理, 至少

存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $F'(\xi) = 0$, 即

$$F'(x) \Big|_{x=\xi} = \left[x \int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt \right] \Big|_{x=\xi} = \int_0^{\xi} f(t)dt \Big|_{x=\xi} = \int_0^{\xi} f(t)dt = 0. \quad \dots\dots 3'$$