



## 数列与函数极限

### 7.1 数列极限的基本定义

例: 存在数列  $\{x_n\}$   $x_1=0.9$   $x_2=0.99$   $x_3=0.999$   $x_n=0.9\dot{9}$

请用数列极限定义证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$

思: 找到  $N$ , 使得  $|x_n - 1| < \varepsilon$

证:  $|x_n - 1| < \varepsilon$

$$10^{99} - 991 < \varepsilon$$

$$10^{-n} < \varepsilon$$

$$n > \log_{10} \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\text{令 } N = \lceil \log_{10} \frac{1}{\varepsilon} \rceil$$

(整数)

当  $n > N$  都有  $|x_n - 1| < \varepsilon$

唯一性: 如果数

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\tan x}$$



# 收敛数列的性质

## 1. 收敛数列的极限唯一

证：反证： $x_n \rightarrow a, x_n \rightarrow b \quad (a \neq b) \quad a < b$

$$\text{取 } \varepsilon = \frac{b-a}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \exists N_1, n > N_1 \text{ 时 } |x_n - a| < \frac{b-a}{2} \Rightarrow -\frac{b-a}{2} < x_n - a < \frac{b-a}{2}$$

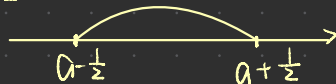
$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b \quad \exists N_2, n > N_2 \text{ 时 } |x_n - b| < \frac{b-a}{2} \Rightarrow -\frac{b-a}{2} < x_n - b < \frac{b-a}{2}$$

$$\frac{b+a}{2} < x_n < \frac{b+a}{2}$$

证： $x_n = (-1)^{n+1}$  是发散的

设收敛  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ，对  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ， $\exists N$ ， $n > N$  时， $|x_n - a| < \frac{1}{2}$

$$\downarrow$$
$$-\frac{1}{2} < x_n - a < \frac{1}{2} \Rightarrow a - \frac{1}{2} < x_n < a + \frac{1}{2}$$



距离为 1

## 2. 收敛数列一定有界

证：设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ，对  $\varepsilon = 1$ ， $\exists N$ ， $n > N$  时

$$|x_n - a| < 1$$

$$|x_n| = |x_n - a + a| \leq |x_n - a| + |a| < 1 + |a|$$

$n > N$  时， $N$  后  $|x_n| < |a| + 1$  有界

收敛数列一定有界，有界不一定收敛

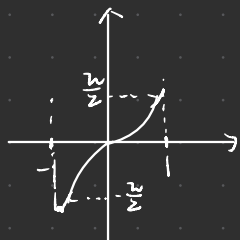
$$(-1)^{n+1}$$

## 3. 收敛数列具有保号性

## 4. 收敛数列的任何子数列收敛于同一数列

# 反三角函数

$$y = \arcsin x$$

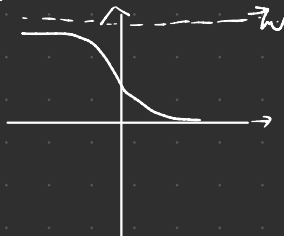


定义域  $x \in [-1, 1]$

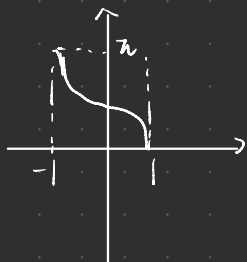
值域  $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

| $x$       | 0 | $\frac{1}{2}$   | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1               |
|-----------|---|-----------------|----------------------|----------------------|-----------------|
| $\arcsin$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$      | $\frac{\pi}{3}$      | $\frac{\pi}{2}$ |

$$4. y = \cot^{-1} x$$



$$2. y = \arccos x$$

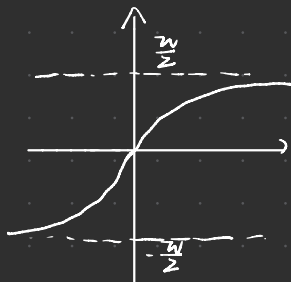


定义域  $x \in [-1, 1]$

值域  $y \in [0, \pi]$

减↓

$$3. y = \arctan x$$



定义域  $x \in (-\infty, +\infty)$

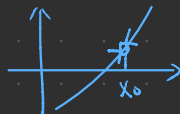
值域  $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

# 函数的极限

1.  $x \rightarrow a$  有限数.  $f(x)$  在  $x_0$  的去心邻域内有定义 (在  $x_0$  处可以没有定义)

$$f(x) \rightarrow b$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow x_0)$$



连续

左极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$$

右极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$$

$x \rightarrow x_0$ ,  $f(x)$  极限存在  $\Leftrightarrow$  左右极限均存在且相等 (与  $x=0$  点无关)

例:  $f(x) = \begin{cases} x-1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ x+1 & x > 0 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$

解:  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$

$\therefore$  左右极限存在但不相等

$\therefore$  极限不存在

性质: ① 函数极限唯一性 ②  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ,  $\exists M > 0$ ,  $\exists \delta > 0$ ,  $0 < |x - x_0| < \delta$  时

局部有界性

③ 局部保号性

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ,  $A > 0$ ,  $\exists \delta > 0$

$0 < |x - x_0| < \delta$ ,  $f(x) > 0$

④  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ,  $\{x_n\} \rightarrow x_0$  函数极限

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  数列极限

无穷小与无穷大

无穷小 **趋于0** (0也可以是无穷小)

从负 从正

定义:  $x \rightarrow x_0 (x \rightarrow \infty)$   $f(x)$  的极限是0, 即  $f(x)$  是  $x \rightarrow x_0$  时的无穷小

无穷小 + 无穷小 无穷小 - 无穷小

无穷小 · 无穷小  $C$  无穷小  $\rightarrow$  都是无穷小

无穷大:  **$\infty$  (+ $\infty$  或 - $\infty$ )**

无穷大 + 无穷大 不一定为无穷大 ( $-\infty + \infty$ )

$\infty - \infty$  也不一定

$\infty \times \infty$  是

定理1:

$f(x)$  无穷大,  $\frac{1}{f(x)}$  无穷小

$f(x)$  无穷小,  $\frac{1}{f(x)}$  是  $\infty$

## 极限运算法则

定理1: 两个无穷小的和是无穷小, 有限个无穷小的和是无穷小

定理2: 有界与无穷小的乘积是无穷小

eg:  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} \cdot x = 0$   
有界 无穷小

定理3:  $C$  · 无穷小, 也是无穷小

定理4: **有限个** 无穷小, 的乘积也是无穷小

定理5:  $\lim f(x) = A$   $\lim g(x) = B$

$\lim [f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$

$\lim [f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$

$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} \quad (B \neq 0)$

定理7:  $\varphi(x) > \alpha(x)$   $\lim \varphi(x) \geq \lim \alpha(x)$

$\varphi(x) > \alpha(x)$   $\lim \varphi(x) \geq \lim \alpha(x)$   
eg  $\frac{1}{x} > \frac{1}{x^2}$  恒  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$

定理6:  $\lim f(x)$  存在  $\lim [C \cdot f(x)] = C \cdot \lim f(x)$

$\lim [f(x)]^n = [\lim f(x)]^n$

$$\text{例 1: } \lim_{x \rightarrow 1} (2x+1) = 1$$

$$\text{例 2: } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-1}{x^2-5x+3} = -\frac{7}{3} \quad (\text{若分母不为0, 直接})$$

$$\begin{aligned} \text{例 3: } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-9} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(x+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x+3} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\text{例 4: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-3}{x^2-\sqrt{x}+4} \left( \frac{-1}{0} \right) = \infty$$

$$\text{例 5: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x-3}$$

$$\begin{aligned} \text{同除 } x^3 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{4}{x} + \frac{2}{x^3}}{7 + \frac{5}{x} - \frac{3}{x^3}} \\ &= \frac{3}{7} \end{aligned}$$

$$\text{例 6: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-2x-1}{2x^3-x^2+5}$$

$$\begin{aligned} \text{同除 } x^3 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{2 - \frac{1}{x} + \frac{5}{x^3}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

总结: 若分子与分母最高次相等则 = 最高次系数之比

若分母 > 分子最高次 = 0

若分母 < 分子最高次 =  $\infty$

(只适用于  $x \rightarrow \infty$ )

极限有左准则 (两个重要极限)

准则 I: 数列  $\{x_n\}, \{y_n\}$ , ①  $\exists n_0 \in \mathbb{N}, n > n_0$  时,  $y_n \leq x_n \leq z_n$  ②  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$

(夹逼准则)  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$  则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

重要极限 I:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

☆ (注意是  $x \rightarrow 0$ )

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \text{无 } \sin x, \text{ 有 } \tan x, \text{ 有 } \arcsin x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1$$

例:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2 (1 + \cos x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x}$$

$$= \frac{1}{2}$$

例:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$

$$\text{令 } x = \sin t$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t}$$

$$= 1$$

准则 II: 单调有界数列必有极限, 收敛必有界, 有界不一定收敛

重要极限 II:  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e \quad (\text{注意: “+” “分子取”})$$

例:  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{x})^x$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{-x})^x$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} [(1 + \frac{1}{-x})^{-x}]^{-1}$$

$$= e^{-1}$$

例:  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{3x})^{2x}$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} [(1 + \frac{1}{3x})^{3x}]^{\frac{2}{3}}$$

$$= e^{\frac{2}{3}}$$

无穷小的比较

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^3 \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{3x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{x^2} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{3x} = \frac{1}{3}$$

①  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta}{\alpha} = 0$  高阶无穷小

$\beta = o(\alpha)$  当  $x \rightarrow 0$  时  $\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{1}{2}x$

②  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta}{\alpha} = \infty$  低阶无穷小

$\sin x \sim x$

③  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta}{\alpha} = C$  同阶

②  $\alpha \sim \tilde{\alpha}, \beta \sim \tilde{\beta}$  且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}$  存在

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta}{\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}$$

④  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta}{\alpha^k} = C \neq 0$   $k$  阶无穷小

例:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 3x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{3x}$$

⑤  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta}{\alpha} = 1$  等价无穷小

$\tan 2x \sim 2x$   
 $\sin 3x \sim 3x$

$$= \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{例: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2 + 3x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2 + 3x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+3} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

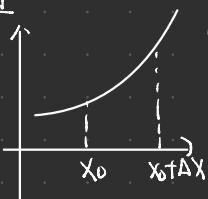
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}} - 1}{\cos x - 1} &= \\ (\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{1}{2}x) \\ (1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x}{-\frac{1}{2}x^2} = -\frac{2}{x} \end{aligned}$$

用等价无穷小 ①  $x \rightarrow 0$

② 是两个相比时

连续性

增量  
(改变量)



$$\textcircled{1} \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

连续  $\begin{cases} \textcircled{1} \text{有极限} \\ \textcircled{2} \text{有定义} \\ \textcircled{3} \text{极限} = \text{函数值} \end{cases}$

$$\text{左连续: } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

$$\text{右连续: } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

连续  $\Leftrightarrow$  左、右连续

间断点

① 在  $x_0$  无定义

②  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  不存在

③  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$

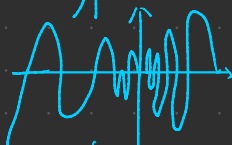
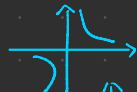
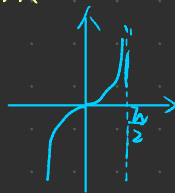
无穷间断点:  $y = \tan x \quad x = \frac{\pi}{2}$

$$y = \frac{1}{x} \quad x = 0$$

振荡间断点:  $y = \sin \frac{1}{x} \quad x = 0$  时

可去间断点  $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad x = 1$  时

跳跃间断点  $y = \begin{cases} x+1 & x > 0 \\ x-1 & x < 0 \end{cases}$



第一类间断点: 左右极限都存在 (可去, 跳跃)

第二类间断点: 左右极限至少一个不存在 (无穷, 振荡)

补充等价无穷小替换

$$① \log_a 1+x \sim \frac{x}{\ln a}$$

$$② \ln 1+x \sim x$$

$$③ a^x - 1 \sim x \ln a$$

$$④ e^x - 1 \sim x$$

$$⑤ (1+x)^a - 1 \sim ax$$

$$⑥ \sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{1}{2}x$$

$$⑦ 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} U(x)^{V(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} e^{\ln U(x)^{V(x)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} e^{V(x) \ln U(x)} \\ &= e^{b \ln a} \\ &= a^b\end{aligned}$$

$$(\lim_{x \rightarrow a} U(x) = a \quad \lim_{x \rightarrow a} V(x) = b)$$



## 两个特殊极限

夹逼准则: 在  $x_0$  某去心邻域内, 有在  $g(x) < f(x) < h(x)$ , 且满足  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$  则有  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$

例 1:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x}$

整体法 = 1

例 2:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{5} \cdot \frac{\sin 5x}{x} \cdot 5$$

$$= \frac{1}{5} \cdot 5$$

$$= 1$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \sin x}{x \cdot x}$$

$$= 1$$

例 4:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{5x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{5x}$$

$$= \frac{3}{5}$$

例:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{x}$$

$$= 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x}$$

$$= 1$$

例:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

补:  $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

$1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{\frac{1}{2}x \cdot \frac{1}{2}x}{x^2} = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$

错误做法  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{0-0}{0^3} = 0$

☆ (零何无穷) 不能用于加减法

正解:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x (1 - \cos x)}{x^3}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x \cdot \frac{1}{2} \sin^2 x}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} x^3}{x^3} = \frac{1}{2}$$

特殊极限  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+\frac{1}{x})^x = e$

(1+无穷) 无穷大

例 (1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^{2x}$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} [(1 + \frac{1}{x})^x]^2$$

$$= e^2$$

(2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{3}{x})^{5x}$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} [(1 + \frac{3}{x})^{\frac{x}{3}}]^{15}$$

$$= e^{15}$$

(3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$= \ln e$$

$$= 1$$

说明:  $x \rightarrow 0, \ln(1+x) \sim x$

(3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{x}$

补充  $3^x = e^{x \ln 3}$

$a^b = e^{b \ln a}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln 3} - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln^3}{x}$$

$$= \ln^3$$

# 无穷小与无穷大

高阶、低阶、同阶、等价无穷小的定义:

下面的  $\alpha$  及  $\beta$  都是在同一个自变量的变化过程中的无穷小, 且  $\alpha \neq 0$ :

如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$ , 那么就说  $\beta$  是比  $\alpha$  高阶的无穷小, 记作  $\beta = o(\alpha)$ :

如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$ , 那么就说  $\beta$  是比  $\alpha$  低阶的无穷小:

如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$ , 那么就说  $\beta$  与  $\alpha$  是同阶无穷小:

如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0, k > 0$ , 那么就说  $\beta$  是关于  $\alpha$  的  $k$  阶无穷小:

如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$ , 那么就说  $\beta$  与  $\alpha$  是等价无穷小, 记作  $\alpha \sim \beta$ .

## 常用的等价无穷小

$$\sin x \sim x \quad a^x - 1 \sim x \ln a$$

$$\tan x \sim x \quad [(1+x)^a - 1] \sim a x$$

$$\arcsin x \sim x \quad 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$$

$$\arctan x \sim x$$

$$\ln(1+x) \sim x$$

$$e^x - 1 \sim x$$

$$\begin{aligned} \text{例: (1)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x}{\arcsin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{x} \\ &= \frac{3}{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\sqrt{1+x} - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\frac{1}{2}x} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{e^{x-3} - 1}{\sin(2x-6)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{2x-6} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \cos x - 1)}{x^2} \quad (\ln(1+x) \sim x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}x)}{x-1}$$

$(x-1)$  为 0

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos[\frac{\pi}{2}(x+1-1)]}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos[\frac{\pi}{2}(x-1) + \frac{\pi}{2}]}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\sin[\frac{\pi}{2}(x-1)]}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{\pi}{2}(x-1)}{x-1}$$

$$= -\frac{\pi}{2}$$

$$1b) \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin \frac{1}{x} \text{ (无穷大} \cdot 0 \text{)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \frac{1}{x}$$

$$= 1$$

PS: 若  $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x}$

不能代换为  $\frac{0}{0}$ , 因为条件变了, 它不是无穷小

总结: ① 无穷小才能代换

② 五花八门的无穷小, 抓住它们

③ 加减法不能用

无穷大的变量之间对比关系

$$x^x \gg x! \gg d^x \gg C^x \gg x^b \gg x^a \gg \ln x$$

$$(x \rightarrow \infty, 0 < a < b, 1 < C < d)$$

eg:

$$x \rightarrow \infty, \frac{\sqrt{x^2 + bx^3}}{x} \text{ 是 } \underline{2} \text{ 阶无穷小}$$

(找大头)

$$x \rightarrow \infty, \frac{\sqrt{x^2 + bx^3}}{x} \text{ 是 } \underline{3} \text{ 阶无穷大}$$

例: (1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + bx}}{7x^2 + 8x}$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{b}{x}}}{7 + \frac{8}{x}}$$

$$= \frac{1}{7}$$

(2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 3^x + 5^x}{4^x + 3^x + 5^x}$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^3}{5^x} + \frac{3^x}{5^x} + 1}{\frac{4^x}{5^x} + \frac{3^x}{5^x} + 1}$$

$$= 1$$

(3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{1 + 2^x + 3^x}$

(找大头 —  $3^x$ , 忽略  $1 + 2^x$ )

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\left(\frac{1}{3^x} + \frac{2^x}{3^x} + 1\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{1 + \frac{2^x}{3^x} + \frac{1}{3^x}}$$

$$= 1$$

(4)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \text{ (x 为正)}$$

$$= 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \text{ (x 为负)}$$

$$= -1$$

∴ 没有极限

(5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 5x}{7x^2 + b}$

PS:  $x \rightarrow 0$  抓大头, 大头为  $x$  而不是  $x^2$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + 5}{7x + b}$$

$$= \frac{5}{b}$$

1. 极限存在  $\Leftrightarrow$  左右极限都存在且相等

2. 有界  $\times$  无穷小 = 无穷小 eg:  $\lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\sin x}_{\text{有界}} \cdot \underbrace{x}_{\text{无穷小}}$

3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 + 2x + 1} = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 1}{x^3 + 2x + 1} = 0$  条件是  $x \rightarrow \infty$

4. 重要极限 ①  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  | 注意 (与  $\tan x$ ,  $\cos x$  等转换)

②  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$

5. 单调有界函数必有极限, 收敛必有界, 有界不一定收敛

等价无穷小: 条件  $x \rightarrow 0$

1.1.1.1

①  $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n}x$   $[(1+x)^a - 1 \sim ax]$

②  $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$

③  $a^x - 1 \sim x \ln a$  ( $e^x - 1 \sim x$ )

④  $\ln^{1+x} \sim x$

间断点 ① 无穷

$\frac{\tan x}{0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$

② 可去

前后连续

③ 振荡

$\sin \frac{1}{x}$   
 $x=0$

④ 跳跃

前后不连续

第一类间断点: 左右极限都存在 (可去, 跳跃)

第二类间断点: 左右极限不存在 (振荡, 无穷)

# 极限求解三步走:

step 1: 代入 (将自变量极限值代入极限表达式, 如果不能得到结果, 继续下一步)

step 2: 分类 | 判断极限类型属于  $\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$ ,  $1^\infty$ ,  $\infty - \infty$ ,  $0 \cdot \infty$ ,  $\infty^0$  中的哪一种, 重点是识别出式中的无穷小和无穷大成分

step 3: 化解 | 根据极限类型, 选择分别适用的求解方法, 进行化解或变形

例:  $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 2x - 10$

(2)  $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{(x-10) \cos \frac{1}{x-10}}{0 \cdot \infty}$   
 $= 0$   
 $(0 \cdot \infty = 0)$

(3)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x + 6}{x^2 - 4}$

抓无穷小量 —  $x-2$

$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-3)}{(x+2)(x-2)}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x+2}$   
 $= -\frac{1}{4}$

(4)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{1+x}}{x^2 + x - 2}$  分子有理化 同乘

$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3-x-1-x}{(x^2+x-2)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-2x}{(x+1)(x+2)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2}{(x+1)(x+2)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}$   
 $= \frac{-2}{6\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{6}$

(5)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

代入发现  $1^\infty$

① 用  $(1+\text{无穷小})^{\text{无穷大}}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x - 1)^{\frac{1}{\cos x - 1} \cdot \cos x - 1 \cdot \frac{1}{x^2}}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x - 1)^{\frac{1}{\cos x - 1} \cdot \cos x - 1 \cdot \frac{1}{x^2}}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\cos x}{\cos x - 1} \cdot \cos x - 1 \cdot \frac{1}{x^2}}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}}$   
 $= e^{-\frac{1}{2}}$

② 套用  $a^b = e^{b \ln a}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^2} \ln \cos x}$   
 $= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2}}$

又  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \cos x - 1)}{x^2}$   
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$

(6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x) \sin x \cos 3x}{e^x \ln(1+2x)}$

拆分为  $0 \cdot \text{有值}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\ln(1+2x)} \cdot \frac{(1+x) \cos 3x}{e^x}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\ln(1+2x)} \cdot \frac{1}{1}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x}$   
 $= \frac{1}{2}$

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x+1)(x-2)}{(x+3)(x-2) + \ln(x-2)}$  (分0有值)  
 $= \lim_{x \rightarrow 2} -\frac{7}{4} \cdot \frac{x-2}{\ln(x-2)}$   
 $= -\frac{7}{4} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\ln(x-2)}$   
 $= -\frac{7}{4}$

4  
1  
3  
0  
2  
6  
1  
9  
9  
8  
0  
1  
0  
6  
5

# 函数的连续性

## 1. 可去间断点

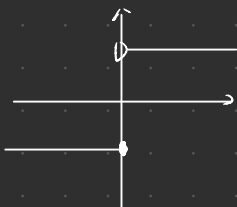
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$$



第一类

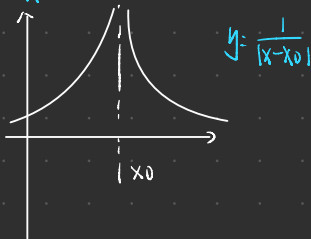
## 2. 跳跃间断点

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$



## 3. 无穷间断点

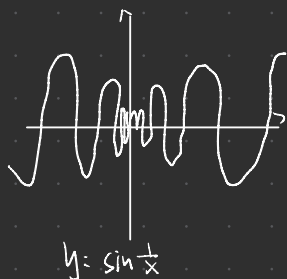
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$$



第二类

## 4. 振荡间断点

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ 振荡不收敛}$$



例: 求函数  $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$  的间断点, 并判断其间断点类型

找间断点:  $\begin{cases} \text{分段函数分段} \\ \text{定义域缺失} \end{cases}$

$$f(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2 \quad \therefore x=1 \text{ 为可去}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \infty \quad \therefore x=2 \text{ 为无穷}$$

例: 设  $f(x) = \begin{cases} \frac{ax+b}{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$  确定 a, b 使得

函数处处连续

① 即让  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax+b}{2-2} = 2 \quad \left( \frac{0}{0} \right)$$

$$\therefore a+b=0$$

② 代入  $b=-a$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax-a}{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(ax-a)(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3})}{2x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3})}{2} = 2$$

$$\therefore \frac{a \cdot 4}{2} = 2$$

$$\therefore a=1 \quad \therefore b=-1$$

连用  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x)$

例: 讨论  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}$  的连续性, 若有间断点, 则判别其类型

( $n$  是未知数,  $x$  是常数)

① 求关于  $n$  的极限

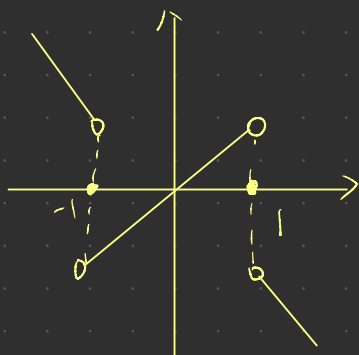
$$x \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}$$

对  $x$  要分类讨论

$$\begin{cases} |x| < 1 & \text{抓大头后, } x^{2n} \text{ 不计} \\ |x| = 1 & 0 \\ |x| > 1 & \text{抓大头后, } 1 \text{ 不计} \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} ① & x \\ ② & 0 \\ ③ & -x \end{cases}$$

得出图像:



间断点  $-1, 1$  都为跳跃间断点

**有界性与最大值最小值定理:** 在闭区间上连续的函数在该区间上有界且一定能取得它的最大值和最小值。

**零点定理:** 设函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 且  $f(a)$  与  $f(b)$  异号 (即  $f(a) \cdot f(b) < 0$ ), 则在开区间  $(a, b)$  内至少有一点  $\xi$ , 使  $f(\xi) = 0$ 。

**介值定理:** 设函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 且在这区间的端点取不同的函数值:

$$f(a) = A, f(b) = B$$

则对于  $A$  与  $B$  之间的任意一个数  $C$ , 在开区间  $(a, b)$  内至少有一点  $\xi$ , 使得  $f(\xi) = C (a < \xi < b)$

例: 证: (1)  $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x = 0$  至少有一个实根

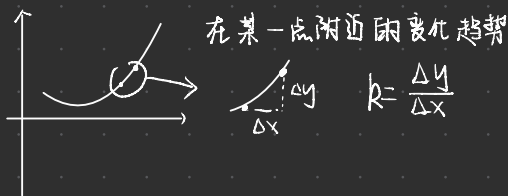
$f(x)$  连续

$$f(2) > 0$$

$$f(-10) < 0$$

$$\therefore f(2) \cdot f(-10) < 0 \quad \therefore \text{存在}$$

# 4.1 导数基本定义



但这是一段的，要讲一个点的导数

当  $\Delta x \rightarrow 0$

$$k = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$k = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

PS:

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$  } 变化量

$\frac{dy}{dx}$  } y和x无穷小变化

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

例：推导下列基本函数的导数

1.  $y = \sin x$     2.  $y = e^x$     3.  $y = x^n$

1.  $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x - \sin x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x (\cos \Delta x - 1) + \cos x \sin \Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x (\cos \Delta x - 1)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos x \sin \Delta x}{\Delta x}$$

(拆成两个就可以用等价无穷小)

$$= \frac{\sin x \cdot \frac{-\Delta x^2}{2}}{\Delta x} + \cos x$$

$$= \sin x \cdot \frac{\Delta x}{2} + \cos x$$

$$= \cos x$$

## 易忘的导数公式

$$\tan x' = \sec^2 x$$

$$\log_a x' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$\arcsin x' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$a^x' = a^x \ln a$$

$$\cot x' = -\csc^2 x$$

$$\arctan x' = \frac{1}{1+x^2}$$

例：设函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ ax+b & x > 1 \end{cases}$  为使函数在  $x=1$  处可导，求 a, b 的取值

若想  $x=1$  可导，则在  $x=1$  处的左导 = 右导

右  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \frac{a(1+\Delta x) + b - 1}{\Delta x} = \frac{a + \Delta x + b - 1}{\Delta x}$

左  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1-\Delta x) - f(1)}{-\Delta x} = \frac{1 - 2\Delta x + \Delta x^2 - 1}{-\Delta x} = \frac{2 - 2\Delta x}{1} = 2$

即右导也 = 2  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a + \Delta x + b - 1}{\Delta x} = 2$

分母也是无穷小

分子也要无穷小

$$a + b - 1 \rightarrow 0$$

$$a + b - 1 = 0 \Rightarrow b = 1 - a$$

$$\text{原式} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a + \Delta x + 1 - a - 1}{\Delta x} = 2$$

连续  $\leftrightarrow$  可导  $a = 2 \quad b = -1$

例：已知函数  $f(x)$  在  $x=0$  处可导，且  $f(0)=1$

已知  $f'(0)=2$  求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - e^x}{\sin x}$

极限

不定

极限

极限

极限

极限

极限

极限

极限

极限

极限

极限

极限

极限

极限

极限

极限

极限

极限

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 2$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = 2$$

用已知来求未知的好

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - e^x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1 - (e^x - 1)}{\sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{\sin x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{\sin x}$$

$$= 2 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{\sin x}$$

$$= 2 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{x} \cdot \frac{x}{\sin x}$$

$$= 2 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{x} \cdot 1$$

$$= 2 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{x}$$

$$= 2 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^x}{1} = 2 - 1 = 1$$

例：已知连续函数  $f(x)$  有  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1$  求  $x=1$  处的函数切线

线  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

又  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 = f(1)$

求  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

即求  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \frac{x^2-1}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2}{1} = 3$$

$k=3$

$y-0=3(x-1)$

$y=3x-3$



判断函数  $y = \sqrt{x} \sin x$  在  $x=0$  处是否可导

若用公式:  $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin x + \sqrt{x} \cos x$   
 $\sqrt{x} \neq 0$   $\therefore$  在  $x=0$  处不可导

用定义求:  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\Delta x} \sin \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\Delta x} \sin \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\sqrt{\Delta x}} = 0$   
 $\therefore$  不可导

公用使用前提条件:  $f(x)$  和  $g(x)$  分别可导  
 但  $fg$  不可导

#### 4.3 隐函数求导

将  $y$  看作  $x$  的函数, 对等式两边每个元求导, 这个超

例:  $y - xe^y = 1$  求  $y'$

解:  $y$  对  $x$  求导

$$y' - (e^y + xe^y \cdot y') = 0$$

$$y' = \frac{e^y}{1 - xe^y}$$

例:  $y = \sqrt{(1+x)(2x+3)(5x+6)}$  求  $y'$

(同时取对数) 将成  $(\quad) + (\quad) + (\quad)$  求导

$$\ln y = \frac{1}{2} \ln(1+x) + \frac{1}{2} \ln(2x+3) + \frac{1}{2} \ln(5x+6)$$

两边

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2(1+x)} + \frac{1}{2(2x+3)} + \frac{1}{2(5x+6)}$$

$$\Rightarrow y' =$$

例:  $y = x^x$

解法1:  $\ln y = x \ln x$

$$(\text{对数}) \quad \frac{y'}{y} = \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = y(1 + \ln x)$$

解法2:  $y = e^{x \ln x}$

$$y' = e^{x \ln x} (\ln x + x \cdot \frac{1}{x})$$

$$y' = e^{x \ln x} (\ln x + 1)$$

#### 4.4 参数方程求导

设  $y = y(x)$  由下列参数方程确定求  $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$

$$\begin{cases} x = \arctan t \\ y = \ln(1+t^2) \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}} = 2t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(\frac{dy}{dx})}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2}{\frac{1}{1+t^2}} = 2(1+t^2)$$

例: 求曲线  $\rho = 2\theta$  在  $\theta = \frac{\pi}{4}$  处的切线斜率

$$\rho = 2\theta = \frac{2\pi}{4}$$

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \theta \\ y &= \rho \sin \theta \end{aligned} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{-\rho \sin \theta}{\rho \cos \theta} = -\frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

(对  $\theta$  求导, 表达式里  $\rho$  该有  $\theta$  与  $x, y$ )  
 $= -\frac{\frac{\pi}{4}}{1} = -\frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned} x &= 2\theta \cos \theta \\ y &= 2\theta \sin \theta \end{aligned} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{2\sin \theta + 2\theta \cos \theta}{2\cos \theta - 2\theta \sin \theta} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}\theta}{\sqrt{2} - \sqrt{2}\theta}$$

#### 4.5 反函数求导

已知  $y = f(x)$ , 且  $f(x)$  有反函数  $g(y) = f^{-1}(y)$ , 有  $x = g(y)$ , 试用  $g(y)$ ,  $g'(y)$  和  $g''(y)$  来分别求出  $\frac{dy}{dx}$  和  $\frac{d^2y}{dx^2}$

#### 4.6 高阶导数

莱布尼茨公式: 如果函数  $u(x), v(x)$  分别具有  $n$  阶导数, 那么两者乘积的  $n$  阶导数为如下形式:  $[u(x) \cdot v(x)]^{(n)} = C_n^0 u^{(n)} v + C_n^1 u^{(n-1)} v' + C_n^2 u^{(n-2)} v'' + \dots + C_n^{n-1} u v^{(n)}$

$$(f \cdot g)^{(4)} = C_4^0 f^4 g^0 + C_4^1 f^3 g^1 + C_4^2 f^2 g^2 + C_4^3 f^1 g^3 + C_4^4 f^0 g^4$$

例:  $y = x^2 \sin x$ , 求  $y^{(10)}$

解:  $= C_{10}^0 x^2 (\sin x)^{10} + C_{10}^1 (x^2)' (\sin x)^9 + C_{10}^2 (x^2)'' (\sin x)^8 + \dots + C_{10}^9 (x^2)^{(9)} \sin x$

#### 5.1 基于微分近似计算

微分计算法则:

$$\begin{aligned} dy &= y' dx \\ d(u \pm v) &= du \pm dv \\ d(Cu) &= C du \\ d(uv) &= v du + u dv \\ d\left(\frac{u}{v}\right) &= \frac{v du - u dv}{v^2} \end{aligned}$$

例: 一根金属棒长为 4m, 底部半径为 2.1m, 受热膨胀后, 长度增加 0.05, 直径增加 0.002 米, 求其增大的体积  $dV$

$$\begin{aligned} V &= SL \\ dV &= \underbrace{S}_{\pi r^2} \underbrace{dL}_{0.05} + \underbrace{L}_{4} \underbrace{dS}_{2\pi r dr} \\ &= \pi \cdot 0.1^2 \cdot 0.05 + 4 \cdot 0.0002\pi \\ &= 0.00027\pi \end{aligned}$$

#### 5.2 洛必达法则

满足: (1)  $x \rightarrow a$ , 函数  $f(x)$  及  $g(x)$  趋于 0  
(2) 在点  $a$  附近去心邻域内, 函数  $f(x)$  及  $g(x)$  有导数且  $g'(x) \neq 0$   
(3)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  存在

则有  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

例:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 3}{3x^2 - 2x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x}{6x - 2} \quad (\text{到此不能再约, 不满足 } \frac{0}{0}) \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

例:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{6} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

例:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x}$

(不能洛)

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \frac{\sin x}{x} \\ &= 1 + 1 = 2 = 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1 \end{aligned}$$

$\frac{\infty}{\infty}$  抓大头 无穷小, 有界 = 无穷小

$(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1)$

例:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$

若用洛:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x}$

正:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = x \sin \frac{1}{x} = 0$

$= x \sin \frac{1}{x} = 0$

不满足 (3) 极限不存在  
不能洛

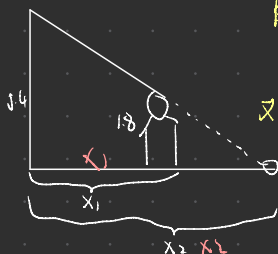
17  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$  若改  $(x \rightarrow -\infty)$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -1$$

### 5.3 相关变化率问题

例：一个路灯高 5.4m，人高 1.8m，当人以 2m/s 朝路灯方向移动时，人影子的长度部分的变化速度是多少？



解：由题  $\frac{dx_1}{dt} = v = 2$

求  $\frac{dx_2}{dt}$

又由相似三角形

$$\frac{x_2 + x_1}{x_2} = \frac{1.8}{5.4}$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{2}{3}x_1$$

$$\textcircled{1} \frac{dx_2}{dt} = \frac{dx_2}{dx_1} \cdot \frac{dx_1}{dt}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3}$$

(链式)

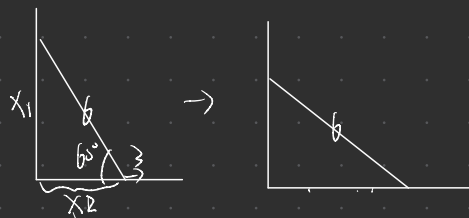
$$\textcircled{2} dx_2 = d(\frac{2}{3}x_1) = \frac{2}{3}dx_1$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{2}{3} \frac{dx_1}{dt} = \frac{4}{3}$$

### 相关变化率问题三个关键步骤：

1. 定义描述问题的关键变量； $(x_1, x_2)$
2. 找出变量之间的关系；
3. 利用链式法则求得相关变化率，或者将变量进行微分处理。

例：一个长 6 米的梯子斜靠在墙上，初始时倾角为  $60^\circ$ ，假设其底部向右以 0.3 m/s 的速度水平滑动，请分别求出其靠在墙上一端下落的速度，以及倾角  $\alpha$  的变化率。



① 定义变量  $x_1, x_2, \alpha$

② 找关系  $x_1^2 + x_2^2 = 36$   $\alpha = \arccos \frac{x_2}{6}$

$$[x_1 = \sqrt{36 - x_2^2}]$$

$$\# \frac{dx_1}{dt} \quad \frac{dx_2}{dt}$$

①

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_1}{dx_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2x_2}{36 - x_2^2} \cdot 0.3$$

$$= -\frac{0.3}{2(36 - x_2^2)} \quad \text{代入 } x_2 = 3 \quad \text{因为是在这瞬间!}$$

$$= -\frac{0.3}{10(36 - 9)}$$

$$= -\frac{0.3}{90}$$

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_1}{dx_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{x_2}{6})^2}} \cdot \frac{1}{6} \cdot 0.3$$

$$\text{代入 } x_2 = 3 = -\frac{0.1\sqrt{3}}{3}$$

(以上为链式)

②

对关系式两端同时求导

$$d(x_1^2 + x_2^2) = d(36)$$

$$2x_1 dx_1 + 2x_2 dx_2 = 0$$

$$dx_1 = -\frac{x_2}{x_1} dx_2$$

$$\therefore \frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_1}{dx_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} = -\frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{dx_2}{dt}$$

$$= 0.3 \cdot -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{10}$$

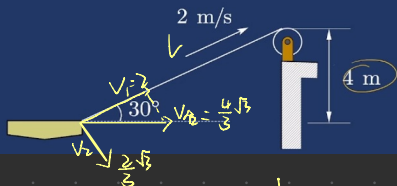
$$d \cos \alpha = d \frac{x_2}{6}$$

$$-\sin \alpha d\alpha = \frac{1}{6} dx_2$$

$$d\alpha = -\frac{1}{6 \sin \alpha} dx_2$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{dx_2}{dt} \cdot -\frac{1}{6 \sin \alpha} = -\frac{1}{10\sqrt{3}}$$

如图所示，在河岸上用一根绳子拉一个船靠近，几何信息如图所示，绳子的速度是2 m/s，请问此时船移动的速度是多少？



① 变量  $x, L$

②  $x^2 + 16 = L^2 \quad \frac{dL}{dt} = 2$

③ 求  $\frac{dx}{dt}$

$$\begin{aligned} d(x^2 + 16) &= dL^2 \\ 2x dx &= 2dL \\ dx &= \frac{dL}{x} \end{aligned} \quad \frac{dx}{dt} = \frac{\frac{dL}{dt}}{\frac{L}{x}} = \frac{dL}{dt} \cdot \frac{x}{L} = \frac{2}{2} = 1$$

## 5.4 函数的单调性、凹凸性

1. 证明不等式  $x > 0$  时,  $1 + \frac{1}{2}x > \sqrt{1+x}$

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \sqrt{1+x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$

$$= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1+x}} \right)$$

$$x > 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{\sqrt{1+x}} > 0$$

$$\therefore f'(x) > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \Rightarrow f(x) > 0$$

判断极值点方法:

① 一阶导: 在某一点处一阶导数为0, 且在该点左右区间导数异号

② 二阶导: 在某一点处一阶导数为0, 二阶导为正则极小值, 二阶导为负极大值

求极值

1)  $y = -x^4 + 2x^2$

$$y' = -4x^3 + 4x$$

$$\text{令 } y' = 0 \quad x_1 = 0, 1, -1$$

$$y'' = -12x^2 + 4$$

$$y'' > 0$$

$$y'' < 0$$

$$y'' < 0$$

2)  $y = x^{\frac{1}{2}}$

$$\textcircled{1} = e^{\ln x^{\frac{1}{2}}}$$

$$= e^{\frac{1}{2} \ln x}$$

$$y' = e^{\frac{1}{2} \ln x} \left( -\frac{1}{2x} \ln x + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2} \right)$$

②  $\ln y = \frac{1}{2} \ln x$  (两边对数)

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{2x} \ln x + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2}$$

$$y' = y \cdot \left( 1 - \ln x \right) \frac{1}{x^2}$$

$$= x^{\frac{1}{2}-2} (1 - \ln x)$$

$$\text{令 } y' = 0 \quad x = e$$

$$y_1 = 1 > 0 \quad y_3 = < 0$$

$$y_1 \cdot y_2 < 0 \quad \therefore x = e \text{ 为极值点}$$

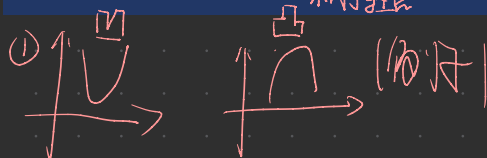
设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内具有一阶和二阶导数, 那么

(1) 若在  $(a, b)$  内  $f''(x) > 0$ , 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的图形是凹的;

(2) 若在  $(a, b)$  内  $f''(x) < 0$ , 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的图形是凸的。

如果曲线  $y = f(x)$  在经过点  $(x_0, f(x_0))$  时, 曲线的凹凸性改变了, 那么就称点  $(x_0, f(x_0))$  为这曲线的拐点的坐标。

拐点  
不同于驻点



例:  $y = \ln x^2 + 1$  求其凹凸区间以及拐点

$$y' = \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x$$

$$\text{令 } y' = 0 \quad x = 0$$

$$y'' = \frac{2(x^2+1) - 2x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$\text{令 } y'' = 0 \quad x = 1, -1$$

$$\text{当 } x < -1, y'' < 0 \quad \text{当 } -1 < x < 1, y'' > 0 \quad \text{当 } x > 1, y'' < 0$$

$$\text{凹: } [-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \quad \text{凸: } (-1, 1)$$

拐点坐标是  $(-1, \ln^2)$ ,  $(1, \ln^2)$

7. 区别: 等价无穷小替换为:  $x \rightarrow 0$   
而非极限为“找大法”  $\begin{cases} x \rightarrow 0 \rightarrow \text{找次数最小} \\ x \rightarrow \infty \rightarrow \text{找次数最高} \end{cases}$

8.  $0 \cdot \infty = 0$ ,  $1^\infty$  [凑  $(1+x)^x$ ], 若有分式可约值 0

9.  $\tan' x = \sec^2 x$        $\cot' x = -\csc^2 x$   
 $\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$        $\arccos' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$

10.  $\frac{0}{0} = \text{不定}$  例:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax+b}{x} = 2 \quad \therefore b=0$

11. 在  $x=1$  处可导  $\Leftrightarrow$  左导 = 右导

12. 连续不一定可导, 可导必连续

13. 提到连续  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

14.  $y = x^x$  (隐函数求导): ① 两边取对数  $\ln y = x \ln x$  求导  
②  $y = e^{x \ln x}$  求导

15.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  (重要极限)       $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$   
无穷小, 有界

16. 相关变代序问题

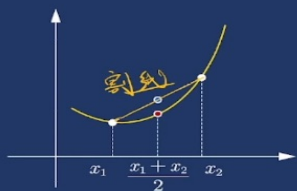
① 定义描述问题关键变量

② 找出变量之间关系

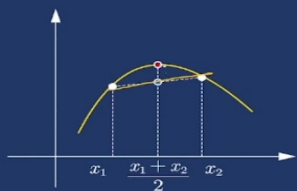
③ 利用链式法则或相关关系

17. 若一阶导为 0, 二阶导为 + 那该点为极小  
二阶导为 - 那该点为极大

18.  $y'' = 0$  的点叫 拐点 (坐标)       $y' = 0$  的点叫 驻点 (非坐标)



凹函数:  $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$



凸函数:  $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$

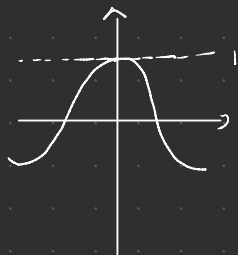
例: 证:  $\frac{e^x + e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}}$

设  $f(x) = e^x$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$

$f'(x) = e^x$ ,  $f''(x) = e^x > 0$   $\therefore$  凸

$\therefore \frac{e^x + e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}}$

例：近似求  $\cos 0.001$  的值



利用  $y = ax^2 + bx + c \approx \cos x$  (模拟以  $\cos x$  图在这小段)

↑  
逼近

$$c = 1, -\frac{b}{2a} = 0 \therefore b = 0$$

$$\Rightarrow y = ax^2 + 1$$

$$\cos x = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

1. 求  $a_0$ : 直接代入  $x=0$ ,  $a_0 = 1$

2. 求  $a_1$ : 求一阶导

$$\sin x = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1}$$

$$\text{代入 } x=0, -\sin 0 = a_1, a_1 = 0$$

3. 求  $a_2$ : 求二阶导

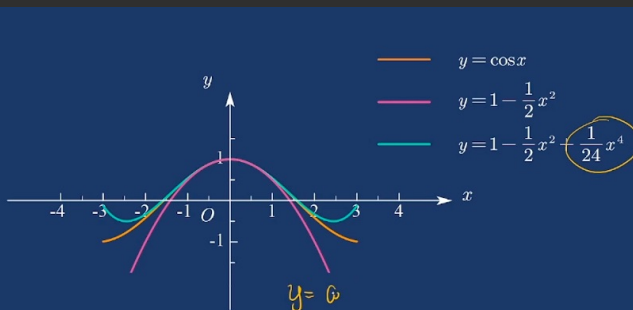
$$\cos x = 2a_2 + 6a_3x + \dots$$

$$\text{代入 } x=0$$

$$a_2 = \frac{1}{2}$$

由此可求出  $a_2, a_4, a_6, \dots$

求出后求和，拟合  $\cos x$  效果如下



$$\text{求导数: } a_1 = \frac{f'(0)}{1!}$$

$$a_2 = \frac{f''(0)}{2!}, f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n$$

$$\text{将 } \sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots \text{ (奇-奇)}$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots \text{ (偶-偶)}$$

$$\text{例: 求极限: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - \sin x}{1 - \cos x}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}) - (1 - \frac{x^3}{6})}{1 - (1 - \frac{x^2}{2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}}{\frac{x^2}{2}} \quad (\text{约, 抓头})$$

$$= 1 \quad (\frac{x^3}{x^2} \text{ 忽略不计})$$

等价无穷小替换: 其实都是泰勒展开可

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$$

在  $x \rightarrow 0$  时, 请判断  $(e^x - \cos x + \sin x - 2x - x^2)$  是  $x$  的几阶无穷小.

方法一: 假设为  $k$  阶无穷小

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x + \sin x - 2x - x^2}{x^k} = a$$

$$\text{洛必达法: } \frac{e^x + \sin x + \cos x - 2 - 2x}{k \cdot x^{k-1}} = a$$

再洛

$$\frac{e^x + \cos x + \sin x - 2}{(k-1)k \cdot x^{k-2}} = \frac{0}{0}$$

$$\downarrow \frac{e^x - \sin x + \cos x}{(k-1)(k-2)k \cdot x^{k-3}} = \frac{0}{0}$$

$$\downarrow \frac{e^x - \cos x - \sin x}{(k-1)(k-2)(k-3)k \cdot x^{k-4}} = \frac{0}{0} \quad \frac{e^x + \sin x}{24 \cdot (k-3)k(k-1)}$$





19. 遇到  $\frac{e^x + e^y}{x} > e^{\frac{x+y}{2}}$  身尖本恩  $\checkmark$  构造  $e^x$

20.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2 + x^3}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}}$  (比较  $x^-$ , 抓大头)  $\therefore \frac{1}{2} = 1$  ( $\frac{x^3}{x^2}$  忽略)  
 $x > 0 \therefore x^3 < x^2$

21. 求几阶无穷小

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x^R} = 1$  (假设为 R 阶)  
 $\downarrow$  洛列不莱证

$x^{R-n}$  令  $R-n=0$ , 为 n 阶

(2) 麦克劳林 (泰勒展开)

22. 泰勒展开 (使用条件:  $x > 0$ )

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots$$

23. (有理分式) ① 分母且不为 0 ( ) 试试拆分, 凑分子 ( $\neq 1$  能凑  $d(x)$  也可)

eg:  $\int \frac{3x+1}{(x-3)(x+1)} dx = \int \frac{2}{x-3} + \frac{1}{x+1} dx = \ln|x-3| + \ln|x+1| + C$

② 若分子是 1, 试试分母凑  $( )^2 + 1 \rightarrow \arctan x$

eg:  $\int \frac{1}{x^2+4x+5} dx = \int \frac{1}{(x+2)^2+1} dx = \arctan(x+2) + C$

当  $\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$

PS: 不定积分记得  $+C$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

24.  $\sin x, \cos x$  谁能让整体变负一就用到  $d( )$

若都不能让整体变负一就凑  $\sec^2 x dx = d(\tan x)$   $\csc^2 x = -d(\cot x)$

$\sec^2 x = \tan^2 x + 1$

$\sec x = \frac{1}{\cos x}$

$\csc x = \frac{1}{\sin x}$

$$\int \frac{1}{1+\sin 2x} dx = \int \frac{1}{1+2\sin x \cos x} dx \left( = \int \frac{\sec^2 x}{\sec^2 x + 2 \tan x} dx = \int \frac{d \tan x}{\tan^2 x + 2 \tan x} = \int \frac{1}{(\tan x + 1)^2} d \tan x = -\frac{1}{\tan x + 1} + C \right)$$

$$\frac{e^x + \sin x + \cos x}{p(x)q(x)r(x)s(x)} x^k \quad \frac{2}{6} \therefore \text{不用考虑}$$

$$p(x)=0 \therefore p(x) \therefore \text{为 } x \text{ 阶无穷小}$$

方法2:

$$x > 0, \quad \frac{e^x}{\sin x} = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{6!}x^6 + \dots - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \dots\right)$$

$\therefore$  为  $x$  阶无穷小

$$\text{例: } \frac{1}{1-x} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

$$= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

$$\frac{1}{0.99} = \frac{1}{1-0.01} = 1 + 0.01 + (0.01)^2 + (0.01)^3 + \dots$$

$$\frac{1}{0.999} = \frac{1}{1-0.001} = 1.001001001001\dots$$

已知  $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$  求以下在  $x=0$  附近的展开

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 + (-x) + (-x)^2 + (-x)^3 + (-x)^4 + \dots$$

↑ 换号

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots$$

$$\text{例: 求极限: } \lim_{x \rightarrow \infty} [x - x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})]$$

PS: 不可直接带  $\infty$  进去,  $\ln(1+x) \sim x$ , 用级数法

$$\text{泰勒展: } \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$\ln(1+\frac{1}{x}) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} + \dots$$

$$\text{代入 } \lim_{x \rightarrow \infty} [x - x^2 (\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} + \dots)]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} [x - x + \frac{1}{2} - \frac{1}{3x} + \frac{1}{4x^2} - \dots] = \frac{1}{2} \quad (\text{其实代入前两项即可, 但为保险})$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^x - 1}{x^2}$$

解:

☆ 当碰见底数与指数都有变量, 写为

$$(1+x)^x = e^{x \ln(1+x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln(1+x)} - 1}{x^2} \quad (e^x - 1 \sim x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x)}{x^2} \quad (\ln(1+x) \sim x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + \cos x) \sin x}{x^5} = 1$$

例: 当  $a, b$  取何值时,  $x \rightarrow 0$  时,  $x - (a + b \cos x) \sin x$  为  $x$  的无穷小

$$\text{解: 原式} = x - a \sin x - b \cos x \sin x$$

$$= x - a \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \right) - b \left( 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \right) \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \right)$$

$$= (1-a-b)x + \left( \frac{a}{6} + \frac{2b}{3} \right) x^3 - \left( \frac{a}{120} + \frac{2b}{15} \right) x^5$$

若要使 5 阶无穷小, 则  $\begin{matrix} 1-a-b=0 \\ \frac{a}{6} + \frac{2b}{3}=0 \end{matrix}$  抓大头,  $x > 0$

$$\text{联立: } \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$f(x) = x^5 \cos x$ , 求  $f(x)$  在  $x=0$  时 1-7 阶导数, 即  $f'(0), f''(0), f'''(0), \dots, f^{(7)}(0)$

$$f(x) = x^5 \left( 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \dots \right)$$

$$= x^5 - \frac{x^7}{2} + \frac{x^9}{24} - \frac{x^{11}}{720} \dots$$

$$\text{又 } f(x) \text{ 展开式为 } f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 + \frac{f^{(6)}(0)}{6!}x^6 + \frac{f^{(7)}(0)}{7!}x^7$$

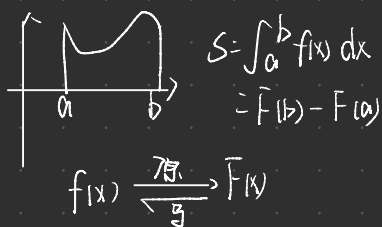
$$\text{--- 对比系数 } \frac{f^{(5)}(0)}{5!} = 1 \quad \therefore f^{(5)}(0) = 120$$

$$\frac{f^{(7)}(0)}{7!} = -\frac{1}{2} \quad \therefore f^{(7)}(0) = 7! \times -\frac{1}{2} = -2520$$

其余没有 = 0

总结: 用泰勒展开时一定要在  $x \rightarrow 0$  时

定积分



① 与变量无关

$$\frac{\int f(x) dx}{\text{一个函数}} \quad \frac{\int_a^b f(x) dx}{\text{一个数}}$$

②  $\int_a^a f(x) dx = 0$

③  $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$

几何意义 (dx 朝左: 有 "-")

④  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

(c 不一定在 a b 之间)

例 1 已知  $f(x) = x^2 - x \int_0^2 f(x) dx + 2 \int_0^1 f(x) dx$  求  $f(x)$

设  $a = \int_0^2 f(x) dx$ ,  $b = \int_0^1 f(x) dx$  (都是常数)

设 a, b

$f(x) = x^2 - ax + 2b$

令 a = 代入自己

$\therefore a = \int_0^2 (x^2 - ax + 2b) dx = \left[ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}ax^2 + 2bx \right]_0^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{2}a + 4b$

$b = \int_0^1 (x^2 - ax + 2b) dx = \left[ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}ax^2 + 2bx \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}a + 2b$

(得到两个方程)

$\therefore a = \frac{4}{3}$

$b = \frac{1}{3}$

$\therefore f(x) = x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$

例:  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= +1$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx$

$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{\pi}{4}$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x d(\cos x)$

$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \cos^2 x d(\cos x)$

$= -(\cos x - \frac{1}{3}\cos^3 x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= +\frac{\pi}{8}$

$\int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{2x+1}}$

令  $t = \sqrt{2x+1}$

$x = \frac{t^2-1}{2}$

$dx = t dt$

$\int_0^4 \frac{t}{1+t} dt$  X

(注意: 换元, 积分区域也要变)

$\therefore t = \sqrt{2x+1}$

$\therefore x=4$  时  $t=3$

$x=0$  时  $t=1$

(找  $t$ ,  $x$  对应的  
换元)

$\int_1^3 \frac{t}{1+t} dt$

$= \int_1^3 \frac{1+t-1}{1+t} dt$

$= \int_1^3 1 - \frac{1}{t+1} dt$

$= t - \ln|t+1| \Big|_1^3$

$= 2 + \ln^2 - \ln^4$

$= 2 + \ln^{\frac{1}{2}}$

$= 2 - \ln^2$  (定积分换元法记得换界)

$\int_1^e \ln x dx$

$= x \ln x - \int_1^e x d \ln x$

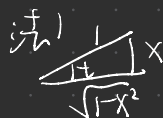
$= x \ln x \Big|_1^e - x \Big|_1^e$

$= e - (e-1)$

$= 1$

(1/7 第 3 页 17)

$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$



$\rightarrow$  法 2



$= \frac{\pi}{4}$

$y = \sqrt{1-x^2} > 0$

$x: 0 \rightarrow 1$

## 1. 华莱士公式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \text{奇: } \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3} \cdot 1 \\ \text{偶: } \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

eg:  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1$  (点×点)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x dx = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5\pi}{32}$$

偶数+1个  $\frac{\pi}{2}$

## 2. 利用奇偶性

如果  $f(x)$  是奇函数  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$



$f(x)$  是偶函数  $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$



例:  $\int_{-2}^2 (\ln \frac{3+x}{3-x} + x^2) dx$

令  $f(x) = \ln \frac{3+x}{3-x}$

$$\begin{aligned} f(-x) &= \ln \frac{3-x}{3+x} \\ &= \ln \left( \frac{3+x}{3-x} \right)^{-1} \\ &= -\ln \frac{3+x}{3-x} \end{aligned}$$

$\therefore f(x) = -f(-x)$   
为奇

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 \ln \frac{3+x}{3-x} dx + \int_{-2}^2 x^2 dx \\ &= 0 + 2 \int_0^2 x^2 dx \\ &= 2 \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^2 = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^3 + \sin^2 x) \cos^3 x dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^2 x dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x) \cos^2 x dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x - \cos^4 x dx$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x - \cos^4 x dx$$

$$= 2 \left( \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} - \frac{3}{4} \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} \right) \quad \text{利用华莱士}$$

$$= \frac{\pi}{8}$$

$$\int_{-1}^1 (x + \sqrt{1-x^2})^2 dx$$

$$= \int_{-1}^1 (x^2 + 2x\sqrt{1-x^2} + 1-x^2) dx$$

$$f(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$$

$\therefore f(x)$  为奇

$$= \int_{-1}^1 1 dx$$

$$= 1 \times 2 = 2 \quad (\text{被积为1, 直接积区间})$$

$$3. \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx$$

$$\text{例: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx \xrightarrow{x \rightarrow \frac{\pi}{2} - x} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx$$

相加

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \frac{\pi}{2} \quad (\text{组合积分})$$

$$\therefore I = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{例: } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x \sin^4 x}{1+e^x} dx \quad \int$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-x} \sin^4(-x)}{1+e^{-x}} dx$$

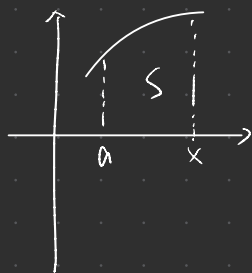
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x}{e^x + 1} dx$$

$$\therefore 2I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx = 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{8}$$

$$\therefore I = \frac{3\pi}{16} \quad (\text{记得} \div 2)$$

# 变上限积分



$$S = \int_a^x f(t) dx$$

$$= F(x) - F(a)$$

$$S' = F' = f(x)$$

$$(\int_0^x f(t) dt)' = f(x) \quad | \text{对上限求导}$$

例1:  $S(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$  求  $S'$

$$S' = e^{x^2}$$

例:  $x > 0$ , 下列变量是关于  $x$  的几阶无穷小

(1) 能求原函数  $\int_0^x t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^x = \frac{x^2}{2}$  2阶

2.  $S(x) = \int_0^{\sin x} e^t dt$  求  $S'$  [上限变, 复合函数]

$$e^{\sin x} \cdot \cos x \quad (\text{复合函数求导})$$

(2) 不求原函数:  $S' = x$

$\therefore S \rightarrow x$  是2阶

(求导后为一阶: 原为2阶)

$$\int_0^u e^t du = e^u \cdot u'$$

3.  $S(x) = \int_{\sin x}^{x^2} t^2 dt$  求  $S'$  (上下限都变, 拆分再复合求导)

$$= \int_{\sin x}^0 t^2 dt + \int_0^{x^2} t^2 dt$$

$$= -\int_0^{\sin x} t^2 dt + \int_0^{x^2} t^2 dt$$

$$= -\sin^3 x \cdot \cos x + x^4 \cdot 2x$$

(可看作上限代入-下限)

$$\int_0^{\sin x} (e^t - 1) dt$$

$$S' = (e^{\sin x} - 1) \cdot \cos x$$

$$\text{又 } x \rightarrow 0 \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$$

$$= e^{\sin x} - 1 \sim x$$

$\therefore$  为2阶

4.  $S(x) = \int_0^x x e^t dt$  ( $x$  拿出, 看作两部分积分)

$$= x \int_0^x e^t dt$$

$$= (x)' \int_0^x e^t dt + x (\int_0^x e^t dt)'$$

$$= \int_0^x e^t dt + x \cdot e^x$$



# 广义积分

$$\int_0^{\infty} (1 - \cos x) dx$$

$$S' = (1 - \cos x) \cdot \sin x$$

↓ 无界函数  
↓ x

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$$

∴ 原为4阶

$$x \int_0^x \sqrt[3]{t} dt$$

$$S' = \int_0^x \sqrt[3]{t} dt + x \cdot x \cdot \frac{1}{3} x^{-2/3}$$

$$= \int_0^x \sqrt[3]{t} dt + \frac{1}{3} x^3$$

∴ 证明

$$S'' = x \cdot \frac{1}{3} x^{-2/3} + \frac{1}{3} x^3 = \frac{1}{3} x^{1/3}$$

原为5阶 (求了两次导降两阶)

例:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t dt}{1 - \cos x}$

(变上限积分函数)

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin x} = 1$$

$$S' = \sin x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin x} = 1$$

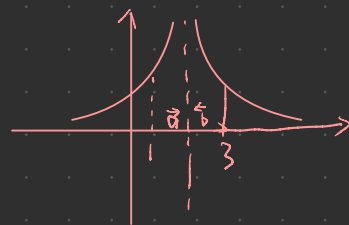
$$1. \int_1^3 \frac{dx}{x^2 - 4x + 4}$$

$$= \int_1^3 \frac{1}{(x-2)^2} dx \rightarrow$$

$$= -\frac{1}{x-2} \Big|_1^3$$

$$= -\frac{1}{3-2} + \frac{1}{1-2} = -1 + 1 = 0$$

不可能为负值



瑕点

2为瑕点, 不能包括2, 分开算

$$\therefore \text{算 } \int_1^2 \frac{1}{(x-2)^2} dx + \int_2^3 \frac{1}{(x-2)^2} dx$$

$$= \lim_{a \rightarrow 2^-} \int_1^a \frac{1}{(x-2)^2} dx + \lim_{b \rightarrow 2^+} \int_b^3 \frac{1}{(x-2)^2} dx$$

$$= \lim_{a \rightarrow 2^-} \left( -\frac{1}{2-x} \right) \Big|_1^a + \lim_{b \rightarrow 2^+} \left( -\frac{1}{2-x} \right) \Big|_b^3$$

$$= +\infty - 1 - 1(-\infty)$$

$$= +\infty$$

$$\int_1^3 \frac{1}{(x-2)^2} dx$$

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{(x-2)^2} dx$$

$$= \frac{1}{2-x} \Big|_3^{+\infty}$$

$$= 0 - (-1) = 1$$



[不包括瑕点 不分开]

- 广义积分: ①  $\int_a^b f(x) dx$   $a, b \in \mathbb{R}$   $f \in C[a, b]$  (太简单)  
存在  $C \in [a, b]$  使得  $f(x) = \infty$   
②  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  或  $\int_{-\infty}^a f(x) dx$ ,  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  (太复杂)

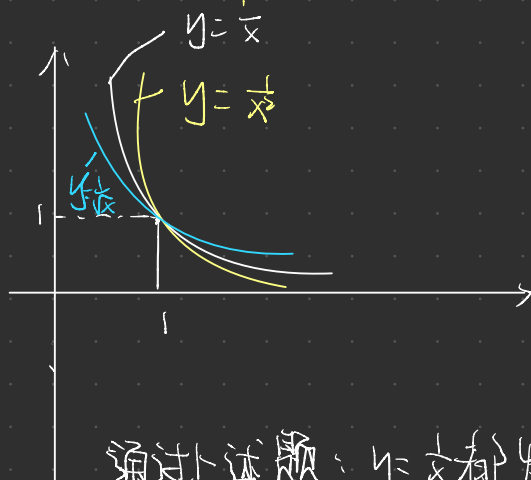
$$\begin{aligned}
 17. \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} dx \\
 &= 2 \int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} d(\sqrt{x}) \\
 &= -2 e^{-\sqrt{x}} \Big|_1^{+\infty} \\
 &= -2 \left( 0 - \frac{1}{e} \right) \\
 &= \frac{2}{e}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \int_0^1 \frac{1}{x} dx \\
 &= \ln x \Big|_0^1 \\
 &= 0 - (-\infty) \\
 &= +\infty
 \end{aligned}
 \quad \left. \begin{aligned} 3. \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx \\ &= \ln x \Big|_1^{+\infty} \\ &= +\infty - 0 \\ &= +\infty \end{aligned} \right\} y = \frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned}
 4. \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx \\
 &= -\frac{1}{x} \Big|_0^1 \\
 &= -1 - (-\infty) = +\infty
 \end{aligned}
 \quad \left. \begin{aligned} 5. \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \\ &= -\frac{1}{x} \Big|_1^{+\infty} \\ &= 0 - (-1) \\ &= +1 \end{aligned} \right\} y = \frac{1}{x^2}$$

$$\begin{aligned}
 6. \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\
 &= \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} dx \\
 &= 2x^{\frac{1}{2}} \Big|_0^1 = 2 - 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7. \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\
 &= 2x^{\frac{1}{2}} \Big|_1^{+\infty} = 2(+\infty) - 2 \\
 &= +\infty
 \end{aligned}$$



通过上述题:  $y = \frac{1}{x}$  都发散

又在  $(0, 1)$   $y = \frac{1}{x^2}$  在  $y = \frac{1}{x}$  上方

$\therefore (0, 1)$   $y = \frac{1}{x^2}$  也发散

$y = \frac{1}{x}$  不一定

$[1, +\infty)$   $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$  在  $y = \frac{1}{x}$  上方

$\therefore y = \frac{1}{\sqrt{x}}$  也发散

$y = \frac{1}{x^2}$  不一定发散

尺子:  $\frac{1}{x}$

$x \rightarrow 0: \frac{1}{\sqrt{x}} < \frac{1}{x} < \frac{1}{x^2}$   
收敛                      发散

$x \rightarrow +\infty: \frac{1}{x^2} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sqrt{x}}$   
收敛                      发散

$y = \sqrt{x}$

(要不同介!!!!)

25.  $\int u dv$   
 $= uv - \int v du$  (反对幂指三)  
 口诀: "添"号

26.  $\int \ln x dx = \int x^0 \ln x dx$   
 $= \int \ln x dx$   
 $= x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx$   
 $= x \ln x - x + C$

27. 华莱士公式:  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \text{奇: } \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots 1 \\ \text{偶: } \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \end{cases}$

28. 利用奇偶性:  $\int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} \text{奇} = 0 \\ \text{偶} = 2 \int_0^a f(x) dx \end{cases}$

29.  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b (a+b-x) dx$

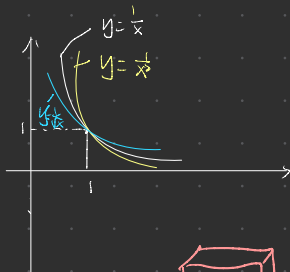
30. 广义积分: ①  $\int_a^b f(x) dx$   $a, b$  有限  $\in$  (太广) (瑕点)  
 存在  $c \in [a, b]$  使得  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$  驻点  $f'(c) = 0$   
 ②  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  或  $\int_{-\infty}^a f(x) dx$ ,  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \in$  (太广) 拐点  $f''(0) = 0$

31.  $\mathbb{R}^n: \frac{1}{x}$

在  $(0, 1)$   $\frac{1}{x^2} > \frac{1}{x} > \frac{1}{\sqrt{x}}$

在  $(1, +\infty)$   $\frac{1}{\sqrt{x}} > \frac{1}{x} > \frac{1}{x^2}$

要不同阶的



32.  $\int_a^b g(x) dx$  几何  
 算长方体体积和

例:  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$   $\geq$  利用  $\pi$  子:  $\frac{1}{x}$

$x \rightarrow \infty, \frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{x}$   
 $\therefore$  收敛

$$\int_0^1 \csc x \, dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\sin x} \, dx \quad (\sec x = \frac{1}{\cos x})$$

$$\csc x = \frac{1}{\sin x}$$

$$x \rightarrow 0 \quad \frac{1}{\sin x} \sim \frac{1}{x}$$

$\therefore \frac{1}{x}$  发散  $\frac{1}{\sin x}$  等价的也发散

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{e^x-1}} \, dx$$

$$x \rightarrow 0 \quad e^x - 1 \sim x$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{e^x-1}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$x \quad \frac{1}{\sqrt{x}} < \frac{1}{x}$$

$\therefore$  收敛

$$\int_1^{+\infty} (1 - \cos \frac{1}{x}) \, dx$$

$$x \rightarrow +\infty$$

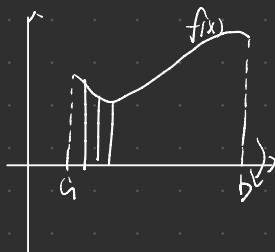
$$1 - \cos \frac{1}{x} \sim \frac{1}{2x^2} \text{ (无需用代换)}$$

$$\frac{1}{2x^2} < \frac{1}{x}$$

$\therefore$  收敛

## 定积分的应用

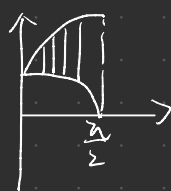
求旋转体的体积



$$V = \pi [f(x)]^2 \cdot dx$$

$$\therefore V_{\text{总}} = \int_a^b \pi [f(x)]^2 \, dx$$

例:  $f(x) = 1 + \sin x, g(x) = \cos x, x=0 \quad x=\frac{\pi}{2}$   
 围成图形, 绕  $x$  轴 绕一周体积



解: 用



$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x)]^2 \, dx - \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} [g(x)]^2 \, dx$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x))^2 - (g(x))^2 \, dx$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2\sin x + \sin^2 x - \cos^2 x) \, dx$$

由华莱士  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2\sin x) \, dx$$

$$= \pi [x - 2\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \pi (\frac{\pi}{2} + 2)$$

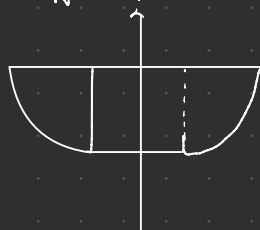
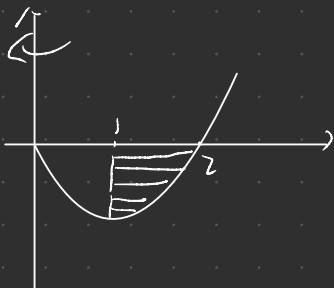
$$= 2\pi + \frac{\pi^2}{2}$$

PS: 不能直接用  $f(x) - g(x)$  代表围成曲线  
 应用大体积 - 小体积

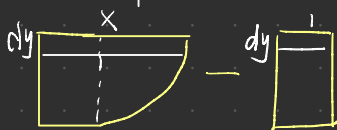
例:  $y = x^2 - 2x$  在  $x \in [1, 2]$  之间

曲线段与  $x$  轴,  $x=1$  围成图形, 求该图形绕  $y$  轴旋转一周形成体积

$$2\pi \int_{-1}^0 x^2 dy$$



法一



[横切]

$$2\pi \int_{-1}^0 x^2 dy = 2\pi \int_{-1}^0 1 dy \quad \text{将 } x, y \text{ 统一}$$

$$y = (x-1)^2 - 1$$

$$x = \sqrt{y+1} + 1$$

$$\text{对称轴右: } \sqrt{y+1} + 1$$

$$\text{左: } \sqrt{y+1} - 1$$

$$= 2\pi \int_{-1}^0 [1 + \sqrt{y+1}]^2 dy - 2\pi$$

$$= 2\pi \int_{-1}^0 [1 + y + 1 + 2\sqrt{y+1}] dy - 2\pi$$

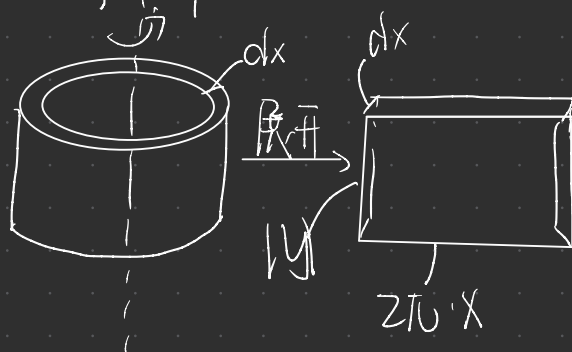
$$= 2\pi \cdot \left[ 2y + \frac{y^2}{2} + \frac{4}{3}(\sqrt{y+1})^{\frac{3}{2}} \right] \Big|_{-1}^0 - 2\pi$$

$$= \frac{11}{6} 2\pi$$

法二: 竖切



$$2\pi \cdot x \cdot y \cdot dx$$



$$V = 2\pi \int_1^2 x |y| dx$$

$$V = \int_1^2 2\pi x (x^2 - 2x) dx \quad \text{上下限}$$

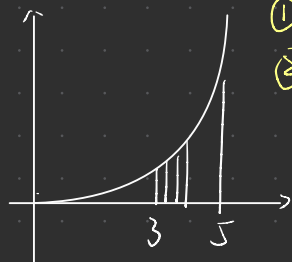
$$= \int_1^2 2\pi x (x^2 - 2x) dx$$

$$= 2\pi \left[ \frac{1}{4} x^4 - \frac{2}{3} x^3 \right] \Big|_1^2$$

$$= 2\pi \left( 16 - \frac{16}{3} - \left( \frac{1}{4} - \frac{2}{3} \right) \right)$$

# 利用定积分对数列求和

1.  $\int_3^5 x^2 dx$



① 切成  $n$  份

②  $\prod_{i=1}^n 3, (3+\frac{2}{n}), (3+\frac{4}{n}), \dots, 5$   
 第  $i$  条高  $(3+\frac{2i}{n})^2$   
 宽  $\frac{2}{n}$

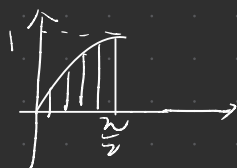
③ 总和

$$\sum_{i=1}^n \frac{2}{n} (3+\frac{2i}{n})^2 = \int_3^5 x^2 dx$$

将下题定积分写成数列求和

1.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$

step 1: 画函数图像, 切  $n$  份



step 2: 求每份宽, 高

$$\prod_{i=1}^n \sin(\frac{\pi i}{2n})$$

step 3: 求总和

$$\sum_{i=1}^n \frac{\pi}{2n} \sin(\frac{\pi i}{2n})$$

例:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n})$

① 提出  $\frac{1}{n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \dots + \frac{1}{1+1})$$

② 改写为  $\Sigma$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\frac{1}{1+\frac{i}{n}})$$

③  $\frac{1}{n} \rightarrow dx, \frac{i}{n} \rightarrow x$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$$

$$= \ln(1+x) \Big|_0^1 = \ln^2$$

例:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2+1^2} + \frac{2}{n^2+2^2} + \frac{3}{n^2+3^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} \right)$

① 提  $\frac{1}{n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[ \frac{1}{n+\frac{1}{n}} + \frac{2}{n+\frac{2}{n}} + \dots + \frac{n}{n+\frac{n}{n}} \right]$$

② 改放  $\Sigma$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{i}{n+\frac{i}{n}} \quad \text{将 } i \text{ 换成 "x" 则 } \frac{i}{n} \rightarrow x$$

③  $\frac{1}{n} \rightarrow dx \quad \frac{i}{n} \rightarrow x$

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx \quad (从 0 \rightarrow 1 \text{ 图中})$$

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} d(1+x^2)$$

$$= \frac{1}{2} |1+x^2|_0^1$$

$$= \frac{1}{2} |1^2$$

# 常微分方程

方程:  $y' = x$

通解:  $y = \frac{x^2}{2} + C$  (解不唯一,  $C$  为常数)

方程:  $y' = x$ ,  $x=0$  时  $y=1$  "定解条件"

特解:  $y = \frac{x^2}{2} + 1$

问题:



写出  $x$  随  $t$  的变化

$$v = \frac{dx}{dt} = 4t$$

$$\therefore x = 2t^2 + C$$

(隐含条件:  $v=0, x=0$ )  $\therefore C=0$

方程:  $y'' = x$  (二阶微分方程)

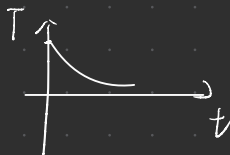
解:  $y' = \frac{1}{2}x^2 + C_1$

$$y = \frac{1}{6}x^3 + C_1x + C_2$$

问题1:

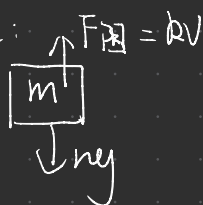


室温  $25^\circ\text{C}$



$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 25)$$

问题2:



$$mg - k \frac{dx}{dt} = m \frac{dv}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$mg - k \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}$$



# 一阶微分方程

## ① 分离变量

$$y' = 2xy$$

$$\frac{dy}{y} = 2x \quad (y \text{ 与 } x \text{ 分开, 各在一边})$$

$$\frac{dy}{y} = 2x dx$$

## ② 两边分别求解

$$\int \frac{1}{y} dy = \int 2x dx$$

$$\Rightarrow \ln|y| = x^2 + C$$

$$|y| = e^{x^2+C}$$

$$y = \pm e^{x^2+C}$$

$$= \pm e^{x^2} \cdot e^C$$

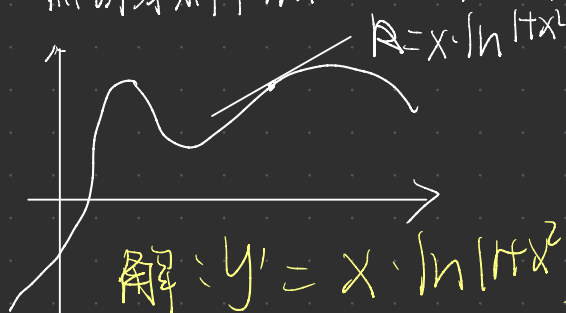
看作一个新C

$$= \pm e^{x^2} \cdot C$$

总结：模型  $y' = P(x)y$

$$y = C e^{\int P(x) dx}$$

已知曲线  $f(x)$  过点  $(0, -\frac{1}{2})$ , 其上任意一点切线斜率为  $x \cdot \ln(1+x^2)$  求曲线方程



$$\text{解: } y' = x \cdot \ln(1+x^2)$$

$$dy = x \cdot \ln(1+x^2) dx$$

$$y = \int \ln(1+x^2) dx$$

$$= \frac{1}{2} [\ln(1+x^2) (1+x^2) - \int \frac{1+x^2}{1+x^2} \cdot 2x dx]$$

$$= \frac{1}{2} [(1+x^2) \ln(1+x^2) - \int 2x dx]$$

$$= \frac{1}{2} (1+x^2) \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} x^2 + C$$

$$\text{又过 } (0, -\frac{1}{2})$$

$$\therefore C = -\frac{1}{2}$$

例:  $f(x)$  满足:  $f(x) = \int_0^{2x} f(t) dt + \ln^2$   
看到变上限积分  
求导

两边求导:  $f'(x) = f(x) \cdot 2$

$$\Downarrow$$

$$y' = 2y$$

$$\therefore y = C \cdot e^{2x} \quad (\text{套一个通解})$$

△ 题目中隐藏信息 " $f(0) = \ln^2$ " (代入)

$\therefore$  可求出C

$$\ln^2 = C \cdot e^0$$

$$\therefore y = \ln^2 e^{2x}$$

$$y' = x \ln(1+x^2)$$

$$dy = x \ln(1+x^2) dx$$

$$y' = P(x)y \quad \text{通解} \quad y = ce^{\int P(x) dx}$$

$$\underline{y' + P(x)y = Q(x)} \quad \text{通解} \rightarrow y = e^{-\int P(x) dx} \left[ \int e^{\int P(x) dx} \cdot Q(x) dx + C \right]$$

$$\downarrow (e^{Q(x)} \cdot y)' = e^{Q(x)} \cdot Q'(x) \cdot y + e^{Q(x)} \cdot y'$$

$$= e^{Q(x)} [y' + Q'(x)y]$$

$$\therefore y' + P(x)y = \frac{(e^{\int P(x) dx} \cdot y)'}{e^{\int P(x) dx}}$$

例: 1.  $y' + \frac{\tan x}{P(x)} y = \frac{\cos x}{Q(x)}$

$$= e^{-\int \tan x dx} \left[ \int e^{\int \tan x dx} \cdot \cos x dx + C \right]$$

$$= e^{\ln \cos x} \left[ \int e^{\ln \cos x} \cdot \cos x dx + C \right]$$

$$= \cos x \left[ \int \frac{1}{\cos x} \cdot \cos x dx + C \right]$$

$$= \cos x (x + C)$$

- ①  $\ln$  不加绝对值
- ② 中间不加  $C$

2.  $(x - 2xy - y^2) \frac{dy}{dx} + y^2 = 0$

联想前两个方程都不符合

转变思想  $Y \rightarrow X$

$$(x - 2xy - y^2) \cdot \frac{dy}{dx} = -y^2$$

$$\frac{x - 2xy - y^2}{y^2} = \frac{dx}{dy}$$

$$\frac{x'}{y'} + \frac{1 - 2y}{y^2} x = \frac{1}{y^2}$$

$$\frac{x'}{y'} + \frac{1 - 2y}{P(x)} x = \frac{1}{Q(x)}$$

$$\therefore x = e^{-\int P(y) dy} \left[ \int e^{\int P(y) dy} \cdot Q(y) dy + C \right]$$

$$\int P(y) dy = \int \frac{1 - 2y}{y^2} dy = \int \left( \frac{1}{y^2} - \frac{2}{y} \right) dy = -\frac{1}{y} - 2 \ln y$$

①  $y' = P(x)y$  一阶线性齐次微分方程

②  $y' + P(x)y = Q(x)$  一阶线性非齐次方程

$y' + P(x)y = Q(x)$  齐次方程

变量代换

$x, y$  全化成  $\frac{y}{x}$   $\rightarrow$  求出  $u$  与  $x$  积分后关系  $\rightarrow$  再换回  $y$

$(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$  (化成只有  $y$  或者  $y'$ )

(左右同除  $x^2$ )

令  $u = \frac{y}{x}$   $\rightarrow$   $(1 + u^2)dx - udy = 0$

$(1 + u^2)dx - udy = 0$  (将  $dy \rightarrow dx$ )

$u = \frac{y}{x}, y = ux, dy = udx + xdu$

$(1 + u^2)dx - u(u dx + x du) = 0$

$\downarrow$

$dx - uxdx = 0$

$\frac{dx}{x} = udu$

$\ln|x| = \frac{u^2}{2} + C$

$\rightarrow$  换回  $y$

$\ln|x| = \frac{y^2}{2x^2} + C$

2.  $y' = \frac{y}{x} + \tan \frac{y}{x}$

令  $\frac{y}{x} = u \Rightarrow y = ux, y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d(ux)}{dx} = \frac{u dx + x du}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$

代入

$u + x \frac{du}{dx} = u + \tan u$

$\int \frac{du}{\tan u} = \int \frac{dx}{x}$

$\swarrow$  两边同乘  $x$

$\sin \frac{y}{x} = \pm e^C x$

$\uparrow$  换回  $y$

$\ln|\sin u| = \ln|x| + C \therefore \sin u = |x| \cdot e^C = \pm e^C x$

变换：情形2:  $ax+by+c \Rightarrow u$

$$dy = (3x+2y+1)^2 dx$$

$$\begin{aligned} \text{令 } 3x+2y+1=u &\xrightarrow{\text{消y}} d(3x+2y+1)=du \\ 3dx+2dy+\frac{du}{2} &= du \\ \Rightarrow dy &= \frac{du-3dx}{2} \end{aligned}$$

$$dy = u dx$$

$$\Rightarrow \frac{du-3dx}{2} = u dx \quad \begin{array}{l} \swarrow u \text{ 同边} \\ \searrow \times \text{ 同边} \end{array}$$

(合并同项, 再分)

$$\frac{du}{2u^2+3} = dx$$

$$\int \frac{1}{2u^2+3} du = \int dx$$

$$\left( \int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C \right)$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^2+\frac{3}{2}} = \int dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}} \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\right) + C$$

↙ 换回 y

$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{3}{2}}} \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{3}(3x+2y+1)\right)$$

总结：两种代换  $\begin{cases} \frac{y}{x} \rightarrow u \\ ax+by+c \rightarrow u \end{cases}$

step 1: 令  $\dots \rightarrow u$

2: 消 y, 使之只有 x 和 u

3: 分离变量后积分

4: 积分后将 u 部分换回 y

一阶微分方程的

★ 分离变量

$$y' = p(x) \cdot y \text{ (线性齐次)} \rightarrow y = C e^{\int p(x) dx}$$

$$y' + p(x)y = q(x) \text{ (线性非齐次)}$$

$$y = e^{-\int p(x) dx} \left[ \int e^{\int p(x) dx} q(x) dx + C \right]$$

$$★ \text{ 变量代换 } \left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow u, \quad dy = u dx + x du$$

$$(ax+by+c) \Rightarrow u, \quad dy = \frac{du - adx}{b}$$

二阶常系数线性齐次微分方程

$y'', y', y$  (不取  $\sqrt{\phantom{x}}, \sin y, \dots$ ) 一次项系数为 0

$$y'' + p y' + q y = 0$$

常数

$$r^2 + pr + q = 0 \quad \text{解}$$

$$\begin{cases} r_1 \neq r_2 & y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \\ r_1 = r_2 & y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x} \\ r_1, r_2 = \alpha \pm \beta i & y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) \end{cases}$$

例:  $y'' - 4y' + 4y = 0$

$$\Rightarrow r^2 - 4r + 4 = 0$$

$$r_1 = r_2 = 2$$

$$\therefore \text{解为 } y = (C_1 + C_2 x) e^{2x}$$

解法2: 降阶

$$\text{令 } p = y', \quad y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p$$

$$\frac{dp}{dy} \cdot p - 4p + 4y = 0$$

例:  $y'' - 2y' + 5y = 0$

$$r^2 - 2r + 5 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac < 0$$

求根:

$$\textcircled{1} (r-1)^2 = -4$$

$$r-1 = \pm 2i \quad (i^2 = -1)$$

$$r = 1 \pm 2i$$

$$\textcircled{2} r = \frac{1 \pm \sqrt{1-20}}{2}$$

$$\therefore \alpha = 1 \quad \beta = 2$$

$$\therefore \text{解为 } y = e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$$

$y=y_1, y=y_2$  都是某个齐次方程的解  
线性齐次 同时是

①  $y=(y_1+y_2)$  也是解

②  $y=Cy_1$  也是解

③  $y=(ay_1+by_2)$  也是解

例:

$y_1$  是  $y''+2y'+5y=0$  的解  $y_1''+2y_1'+5y_1=0$

$y_2$  是  $y''+2y'+5y=x$  的解  $y_2''+2y_2'+5y_2=x$

若把  $y_1, y_2$  组合起来

是下方线性非齐次的解而非线性齐次的解

齐次解 + 非齐次解 = 非齐次解

二阶常系数线性非齐次方程

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

(利用上方: 齐次解 + 非齐解 = 非齐解)

例:  $y'' - 4y = e^{2x}$

Step 1: 先解齐次:  $y'' - 4y = 0$

$$r^2 - 4 = 0$$

$$r = \pm 2$$

$$Y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$$

Step 2: 求特解:

$$f(x) = \begin{cases} P_n(x) e^{ax}, & P_n(x) \text{ 是 } x \text{ 的 } n \text{ 次多项式} \\ [P_m(x) \cos bx + P_n(x) \sin bx] e^{ax} & (1) \end{cases}$$

$P_m, P_n$  分别是  $m, n$  次

特解: (此题中  $P_n(x)$  为 0 次)

$$y^* = e^{ax} \cdot \underbrace{A \cdot x^0}_{\substack{\text{0次} \\ (P_n(x))}} \cdot \underbrace{x^0}_{\substack{\text{1次} \\ \text{la } P_m, P_n \text{ 中有一个}}}$$

$$y^{*11} = A e^{2x} (4x+4)$$

满足  $y'' - 4y = e^{2x}$  代入:

$$A e^{2x} (4x+4) - 4A x e^{2x} = e^{2x}$$

$$4A e^{2x} = e^{2x}$$

$$A = \frac{1}{4}$$

$$\therefore y^* = \frac{1}{4} x e^{2x}$$

Step 3: 齐 + 非齐得最后答案

$$y = Y + y^* = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{4} x e^{2x}$$

31. 微分方程和不定积分

变量,  $\frac{1}{x} = dx$   $\frac{1}{y} = x$

32. 一阶微分方程  $y' = P(x)y \xrightarrow{\text{通解}} y = Ce^{\int P(x)dx}$

33.  $(x - 2xy - y^2) \frac{dy}{dx} + y^2 = 0$

联想前两个方程都不符合

转变思想,  $Y \rightarrow X$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{x - 2xy - y^2}{y^2}$$

$$\frac{x'}{x} = \frac{1}{\frac{1}{y^2} - \frac{2y}{y^2}} = \frac{1}{q(y)}$$

★ 变量代换

①  $x, y$  全化成  $\frac{y}{x} \rightarrow$  求出  $u$  与  $x$  积分后关系  $\rightarrow$  再换回  $y$

$$(x^2 + y^2)dx - xydy = 0 \quad (\text{化成只有 } y \text{ 或 } y')$$

注意区分  $dy$  与  $y'$

$$(y = ux)$$

$$dy = udx + xdu$$

$$\text{但 } y' = \frac{dy}{dx} = \frac{u dx + x du}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$$

最后化为关于  $x$  和  $u$  的方程, 方便积分

② 变换: 情形 2:  $ax + by + c \rightarrow u$

$$dy = (3x + 2y + 1)dx$$

$$\text{令 } 3x + 2y + 1 = u \xrightarrow{\text{消 } y} d(3x + 2y + 1) = du$$

$$3dx + 2dy + d1 = du$$

$$\Rightarrow du = 3dx$$

总结: 两种代换  $\frac{y}{x} \rightarrow u$

Step 1:  $ax + by + c \rightarrow u$

2. 消  $y$ , 使之只有  $x$  和  $u$

3. 分离变量后积分

4. 积分后将  $u$  部分换回  $y$

二阶线性齐次

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

↓

$$r^2 + pr + q = 0$$

$$\begin{cases} r_1 \neq r_2 & y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \\ r_1 = r_2 & y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x} \\ r_1, r_2 = \alpha \pm \beta i & y = e^{\alpha x} (C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x) \end{cases}$$

二阶线性非齐次

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = p(x)e^{ax}$$

step 1: 先求齐次

step 2: 求非齐特解:  $y^* = e^{ax} (p(x)) \times \text{⓪}$

一次  $Ax+B$

无  $Ax^2$

代入求出A

看a与r  
有2个相同

step 3: 解 = 齐 + 非齐