

《高等数学 A》期末 (上)

院(系) _____ 班级 _____ 学号 _____ 姓名 _____

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分										

得分

一、选择题 (本大题分 5 小题, 每题 3 分, 共 15 分)

1、已知数列 $\{x_n\}$ ($n=1,2,\Lambda$) 收敛, 则 ()

- (A) 数列 $\{x_n\}$ 必单调有界; (B) 数列 $\{x_n\}$ 必有界;
(C) 数列 $\{x_n\}$ 必单调; (D) 前三个选项均不正确.

2、设 $f(x)$ 在 $U(0,\delta)$ 有定义, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0) - f(0-2\Delta x)}{\Delta x} = 1$, 则必有 ()

- (A) $f'(0)=1$ (B) $f'(0)=-1$ (C) $f'(0)=-\frac{1}{2}$ (D) $f'(0)=\frac{1}{2}$

3、设 $f(x)$ 连续, 且 $f'(0) > 0$, 则 $\exists \delta > 0$, 有 ()

- (A) $f(x)$ 在区间 $(0,\delta)$ 单调增; (B) $f(x)$ 在区间 $(-\delta,0)$ 单调减;
(C) 对 $\forall x \in (0,\delta), f(x) > f(0)$; (D) 对 $\forall x \in (-\delta,0), f(x) > f(0)$.

4、函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 连续是它在 $[a,b]$ 可积的 ()

- (A) 充分非必要条件; (B) 必要非充分条件;
(C) 充分必要条件 (D) 既非充分又非必要条件.

5、反常积分 $\int_2^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^p} dx$ 收敛, 则 p 满足 ()

- (A) $p \geq 1$ (B) $p > 1$ (C) $p \leq 1$ (D) $p < 1$



得分

二、填空题 (本大题分 5 小题, 每题 4 分, 共 20 分)

1、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \Lambda + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$

2、函数 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ 的 6 阶带皮亚罗余项的麦克劳林公式是 $\underline{\hspace{2cm}}$

3、曲线 $y = e^{-x^2}$ 凸的区间是 $\underline{\hspace{2cm}}$

4、由曲线 $y = \cos^{\frac{3}{2}} x$, $(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2})$ 与 x 轴所围平面图形绕 x 轴旋转一周所的旋

转体的体积 $V = \underline{\hspace{2cm}}$

5、方程 $xy' + y = 0$ 的通解是 $\underline{\hspace{2cm}}$

得分

三、计算下列各题 (每题 7 分, 共 21 分)

1、求极限 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{(\pi - 2x)^2}$

2、设 $y = y(x)$ 是由方程 $x^2 - y + 1 = e^y$ 所确定, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x=0}$.

3、求函数 $y = 2 - (x-1)^{\frac{2}{3}}$ 的极值.



得分

四、计算下列积分(每题 7 分, 共 14 分)

1、 $\int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$

2、 $\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx$

得分

五、(本题 8 分) 求微分方程 $y'' = \frac{2x}{1+x^2} y'$ 的通解.

得分

六、(本题 8 分) 讨论方程 $\int_0^x \sqrt{1+t^4} dt + \int_{\cos x}^0 e^{-t} dt = 0$ 的实根个数.





得分

七、(本题 8 分) 半径为 R 的半圆形闸门垂直放入水中, 其直径与水面平齐, 已知水的密度为 ρ , 试求该闸门所受到的侧压力.

得分

八、(本题 6 分) 证明: $\frac{2a}{a^2+b^2} < \frac{\ln b - \ln a}{b-a} < \frac{1}{\sqrt{ab}}$, $(0 < a < b)$.



《高等数学 A》期末

一、选择题 (本大题分 5 小题, 每题 3 分, 共 15 分)

1、B 2、D 3、C 4、A 5、B

二、填空题 (本大题分 5 小题, 每题 4 分, 共 20 分)

1、1 2、 $1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + o(x^7)$ 3、 $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ 4、 $\frac{4\pi}{3}$ 5、 $y = \frac{C}{x}$ (C 为任意常数)

三、计算下列各题 (每题 7 分, 共 21 分)

1、解: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{(\pi - 2x)^2} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cot x}{\pi - 2x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\csc^2 x}{-2} = -\frac{1}{8}$ 2、解: 将 $x=0$ 代入方程, 得 $y=0$, 方程两边求导: $2x - \frac{dy}{dx} = e^y \frac{dy}{dx}$ 代入 $x=0, y=0$, 得 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 0$, 继续求导: $2 - \frac{d^2 y}{dx^2} = e^y \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + e^y \frac{d^2 y}{dx^2}$ 代入 $x=0, y=0$, $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 0$, 得 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0} = 1$.3、解: $y' = -\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{1}{3}}$, $x=1$ 是不可导点 (可能的极值点), 当 $x < 1$ 时, $y' > 0$, 当 $x > 1$ 时, $y' < 0$, 故 $x=1$ 是函数 $y = 2 - (x-1)^{\frac{2}{3}}$ 的极大值点, 极大值为 2.



四、计算下列积分(每题7分,共14分)

1、解: $\int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx = \int \ln^2 x d(-\frac{1}{x}) = -\frac{\ln^2 x}{x} + \int \frac{2\ln x}{x^2} dx$

$$= -\frac{\ln^2 x}{x} - \frac{2\ln x}{x} + \int \frac{2}{x^2} dx = -\frac{\ln^2 x + 2\ln x + 2}{x} + C$$

2、解: 令 $x = 2\sin t, |t| < \frac{\pi}{2}$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\sin^2 t}{2\cos t} \cdot 2\cos t dt$

$$= 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$

五、(本题8分) 解: 令 $y' = p, y'' = p'$, 则 $\frac{dp}{dx} = \frac{2x}{1+x^2} p$, 利用分离变量法,

得 $p = C_1(1+x^2)$ 两边积分, 得 $y = C_1(x + \frac{x^3}{3}) + C_2$. (C_1, C_2 为任意常数)

六、(本题8分)

解: 记 $f(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^4} dt + \int_{\cos x}^0 e^{-t^2} dt$, 则 $f'(x) = \sqrt{1+x^4} + \frac{\sin x}{e^{\cos^2 x}} > 0$, 即函

数 $f(x)$ 单调增, 又 $f(0) = -\int_0^1 e^{-t^2} dt < 0, f(\frac{\pi}{2}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+t^4} dt > 0$, 故 $f(x)$ 有且

仅有一个零点, 即方程 $\int_0^x \sqrt{1+t^4} dt + \int_{\cos x}^0 e^{-t^2} dt = 0$ 有且仅有一个根.

七、(本题8分) 解: 以闸门的圆心为原点, 垂直向下方向为 x 轴建立坐标系.

则所求压力 $P = \int_0^R 2\rho g x \sqrt{R^2 - x^2} dx = -\rho g \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} d(R^2 - x^2) = \frac{2\rho g R^3}{3}$

八、(本题 6 分) 证明: 左边的不等式可利用拉格朗日中值定理,
 $\frac{\ln b - \ln a}{b - a} = \frac{1}{\xi} \quad (a < \xi < b)$, 则由 $\frac{1}{\xi} > \frac{1}{b} = \frac{2a}{2ab} > \frac{2a}{a^2 + b^2}$, 左边不等式成立.

右边不等式构造函数, 记 $f(x) = \ln x - \ln a - \frac{x-a}{\sqrt{ax}} \quad (x > a > 0)$, 则有

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{a}{2x\sqrt{x}} \right) = -\frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})^2}{2x\sqrt{ax}} < 0 \Rightarrow f(x) \text{ 单调递减, 从而}$$

有 $f(b) > f(a) = 0$. 证毕.





《高等数学 A》期末

院(系) _____ 班级 _____ 学号 _____ 姓名 _____

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

得分

一、选择题(本题分 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x^2$ 是关于 x 的 _____ 阶无穷小 ()

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

2. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{x}, & x < 0, \\ x, & x > 0, \end{cases}$ 则点 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的 ()

(A) 跳跃间断点 (B) 可去间断点 (C) 无穷间断点 (D) 连续点

3. 已知 $f'(3)=2$, 则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-h)-f(3)}{2h} =$ ()

(A) 1 (B) -2 (C) -1 (D) 0

4. 曲线 $r=3\cos\theta$, $r=1+\cos\theta$ 所围图形公共部分的面积等于 ()(A) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}(1+\cos\theta)^2 d\theta + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(3\cos\theta)^2 d\theta$ (B) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (1+\cos\theta)^2 d\theta + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (3\cos\theta)^2 d\theta$ (C) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}(1+\cos\theta)^2 d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(3\cos\theta)^2 d\theta$ (D) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos\theta)^2 d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (3\cos\theta)^2 d\theta$ 5. 以 $y=Cx^2$ (C 为任意常数) 为通解的微分方程是 ()(A) $xdy - ydx = 0$ (B) $xy' = x$ (C) $xy = y'$ (D) $xy' = 2y$



得分

二、填空题 (本题分 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分)

1. 函数 $f(x) = e^x - 2$ 在 $(0, +\infty)$ 内的零点个数为_____.2. 曲线 $y = \ln(x^2 + 1)$ 在区间_____内向上凹, 拐点坐标为_____.3. 设 $F(x) = \ln(3x + 1)$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $\int f'(2x + 1)dx =$ _____.4. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - x, & 1 < x < 2, \end{cases}$ 则 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx =$ _____.

0, 其它,

5. 微分方程 $y' - \frac{1}{x}y = xe^x$ 的通解为_____.

得分

三、计算下列各题 (本题分 3 小题, 每小题 6 分, 共计 18 分)

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x^2} \right]$

得分

2. 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases} (t \neq 2k\pi, k \text{ 为整数})$ 所确定,求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.3. 设 $y = y(x)$ 由方程 $y - xe^y = 1$ 所确定, 求 $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=0}$.



得分

四、设抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 过原点, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时 $y \geq 0$, 又已知 $2a + 3b = 2$, 试确定 a, b, c , 使该曲线与 x 轴及直线 $x = 1$ 围成的图形绕 x 轴旋转所得立体的体积最小. (本题 8 分)

得分

五、计算下列积分(本题分 2 小题, 每小题 6 分, 共计 12 分)

1. $\int \arccos x dx$

2. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$

得分

六、求微分方程 $(1-x^3)y'' + 3x^2y' = 0$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 1$ 的特解.
(本题 8 分)



得分

七、有一半径为 4 米开口向上的半球形容器，容器内盛满了水，试求将容器内水全部吸出需作多少功？（水的密度取 1000 kg/m^3 ，结果中保留 πg ）

(本题 7 分)

得分

八、证明：当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时， $2\sin x + \tan x > 3x$. (本题 6 分)

得分

九、设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，证明：存在 $\xi \in (a, b)$ ，使 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$. (本题 6 分)



《高等数学 A》期末

院(系) _____ 班级 _____ 学号 _____ 姓名 _____

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

一、选择题 (本题分 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x^2$ 是关于 x 的 _____ 阶无穷小 (C)

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

2. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{x}, & x < 0, \\ \frac{x}{\sqrt{1+x-1}}, & x > 0, \end{cases}$ 则点 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的 (B)

(A) 跳跃间断点 (B) 可去间断点 (C) 无穷间断点 (D) 连续点

3. 已知 $f'(3) = 2$, 则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-h) - f(3)}{2h} =$ (C)

(A) 1 (B) -2 (C) -1 (D) 0

4. 曲线 $r = 3 \cos \theta$, $r = 1 + \cos \theta$ 所围图形公共部分面积等于 (B)

(A) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2} (1 + \cos \theta)^3 d\theta + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (3 \cos \theta)^3 d\theta$

(B) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 + \cos \theta)^3 d\theta + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (3 \cos \theta)^3 d\theta$

(C) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} (1 + \cos \theta)^3 d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (3 \cos \theta)^3 d\theta$

(D) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos \theta)^3 d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (3 \cos \theta)^3 d\theta$

5. 以 $y = Cx^2$ (C 为任意常数) 为通解的微分方程是 (D)(A) $xdy - ydx = 0$ (B) $xy' = x$ (C) $xy = y'$ (D) $xy' = 2y$



得分

二、填空题 (本题分 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分)

1. 函数 $f(x) = e^x - 2$ 在 $(0, +\infty)$ 内的零点个数为 1

2. 曲线 $y = \ln(x^2 + 1)$ 在区间 $(-\infty, -1], [1, +\infty)$ 内向上凹, 拐点坐标为 $(\pm 1, \ln 2)$

3. 设 $F(x) = \ln(3x+1)$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数, 则

$$\int f'(2x+1)dx = \frac{3}{12x+8} + C$$

4. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & 1 < x < 2, \end{cases}$ 求 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \underline{\frac{5}{6}}$
0, 其它

5. 微分方程 $y' - \frac{1}{x}y = xe^x$ 的通解为 $y = Cx + xe^x$

得分

三、计算下列各题 (本题分 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分)

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x^2} \right] = \underline{\frac{1}{2}}.$

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{2x} \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x(1+x)} = \frac{1}{2} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

2. 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases} (t \neq 2k\pi, k \text{ 为整数})$ 所确定,

求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$

解 $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{[x'(t)]^3} = \frac{-1}{(1 - \cos t)^2} \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

3. 设 $y = y(x)$ 由方程 $y - xe^y = 1$ 所确定, 求 $\frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{x=0}.$



解 原方程两边对 x 求导 $y' - e^y - xe^y y' = 0$ (1)2 分

上式两边对 x 再求导 $y'' - 2e^y y' - xe^y (y')^2 - xe^y y'' = 0$ (2)2 分

$x=0$ 代入原方程得 $y(0)=1$, 代入(1)式得 $y'(0)=e$

代入(2)式得 $y''(0)=2e^2$ 2 分

得分

四、设抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过原点, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $y \geq 0$, 又已知 $2a+3b=2$, 试确定 a, b, c , 使该曲线与 x 轴及直线 $x=1$ 围成的图形绕 x 轴旋转所得立体的体积最小. (本题 8 分)

解 由题知曲线过点 $(0,0)$, 得 $c=0$, 即 $y=ax^2+bx$1 分

旋转体积

$$V = \int_0^1 \pi y^2 dx = \pi \int_0^1 (ax^2+bx)^2 dx = \pi \left[\frac{a^2 x^5}{5} + \frac{abx^4}{2} + \frac{b^2 x^3}{3} \right]_0^1 = \pi \left(\frac{a^2}{5} + \frac{ab}{2} + \frac{b^2}{3} \right)$$

因为 $2a+3b=2$, $V = \pi \left[\frac{a^2}{5} + \frac{4(1-a)^2}{27} + \frac{a(1-a)}{3} \right]$,3 分

两边对 a 求导得 $\frac{dV}{da} = \frac{\pi}{27} \left(\frac{4}{5}a + 1 \right)$, 令其等于 0 得唯一驻点 $a = -\frac{5}{4}$,

$\frac{dV}{da}$ 在该处由负变正, 此点为极小值点, 故体积最小,2 分

这时 $b = \frac{3}{2}$, 故所求函数 $y = ax^2 + bx + c = -\frac{5}{4}x^2 + \frac{3}{2}x$2 分

五、计算下列积分(本题分 2 小题, 每小题 6 分, 共计 12 分)

得分

1. $\int \arccos x dx$

解 $\int \arccos x dx = x \arccos x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ 3 分

$= x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$ 3 分

2. $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$

解 令 $x = \sin t$, 原式 $= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t dt \dots\dots\dots 3$ 分

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \left[\frac{t}{2} - \frac{1}{4} \sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \dots\dots\dots 3$$

得分	
----	--

六、求微分方程 $(1-x^3)y'' + 3x^2y' = 0$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=1$ 的特

解. (本题 8 分)

解 令 $y' = p(x)$, $y'' = p'(x)$, 则 $(1-x^3)\frac{dp}{dx} = -3x^2p \dots\dots\dots 2$ 分

$$\frac{dp}{p} = \frac{-3x^2 dx}{1-x^3}, \text{ 两边积分得 } \ln p = \ln(1-x^3) + \ln C_1, \dots\dots\dots 3$$

$$y'(x) = p = C_1(1-x^3), \quad Q \ y'(0) = 1 \therefore C_1 = 1$$

$$y'(x) = 1 - x^3, \quad y = x - \frac{1}{4}x^4 + C_2, \quad Q \ y(0) = 1 \therefore C_2 = 1$$

$$\therefore \text{所求解为 } y = x - \frac{1}{4}x^4 + 1. \dots\dots\dots 3$$

得分	
----	--

七、有一半径为 4 米开口向上的半球形容器, 容器内盛满了水, 试求将容器内水全部吸出需作多少功? (水的密度取 1000 kg/m^3 , 结果中保

留 πg) (本题 7 分)

解 建立坐标系, $dv = \pi(4^2 - x^2)dx \cdot \rho g \cdot x \dots\dots\dots 2$ 分

$$dw = \pi(4^2 - x^2)dx \cdot \rho g \cdot x \dots\dots\dots 2$$

$$w = \int_0^4 10^3 \pi g x (4^2 - x^2) dx \dots\dots\dots 2$$

$$= 64\pi g \quad (KJ) \dots\dots\dots 1$$

得分	
----	--

八、证明: 当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $2 \sin x + \tan x > 3x$. (本题 6 分)

证 设 $f(x) = 2 \sin x + \tan x - 3x$, $f(0) = 0$

$$f'(x) = 2 \cos x + \sec^2 x - 3, \quad f'(0) = 0 \dots\dots\dots 2$$



$$f''(x) = -2\sin x + 2\sec^3 x \tan x = \frac{2\sin x(1 - \cos^3 x)}{\cos^3 x} > 0, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2}) \dots\dots 2 \text{分}$$

所以当 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时, $f'(x)$ 单增, 故当 $x > 0$ 时 $f'(x) > f'(0) = 0$

进而当 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时, $f(x)$ 单增, 故当 $x > 0$ 时 $f(x) > f(0) = 0$,

从而, 当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时 $2\sin x + \tan x > 3x$2 分

得分	

九、设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a). \quad (\text{本题 } 6 \text{ 分})$$

证 令 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$,2 分

因为 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 所以 $F(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可

导, 且 $F'(x) = f(x)$, $x \in (a, b)$.

由拉格朗日中值定理, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $F(b) - F(a) = F'(\xi)(b-a)$,

即存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$4 分





《高等数学 A (上)》期末

院(系) _____ 班级 _____ 学号 _____ 姓名 _____

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

一、选择题 (本题分 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分)

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\cos x - \cos 2x$ 是 x^2 的 ()

- (A) 高阶无穷小 (B) 同阶无穷小, 但不等价无穷小
(C) 低阶无穷小 (D) 等价无穷小

2. 曲线 $y = \frac{x^2 - 3x + 4}{x^2 - 5x + 6}$ 的渐近线共有 ()

- (A) 1 条 (B) 2 条 (C) 3 条 (D) 4 条

3. 设 $f(x) = \begin{cases} ae^x, & x < 0 \\ b + \ln(1+x), & x \geq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导, 则 ()

- (A) $a = -1, b = -1$ (B) $a = 1, b = 1$
(C) $a = 2, b = 2$ (D) $a = 2, b = 1$

4. 方程 $x^5 + x^3 - k = 0$ (常数 $k > 0$) 正根的个数为 ()

- (A) 5 个 (B) 3 个 (C) 1 个 (D) 不能确定

5. 设函数 $f(x)$ 的一个原函数为 $\sin 2x$, 则 $\int f'(2x)dx =$ ()

- (A) $\cos 4x + C$ (B) $\frac{1}{2}\cos 4x + C$ (C) $2\cos 4x + C$ (D) $\sin 4x + C$

二、填空题 (本题分 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分)

得分

6. 函数 $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{|x|(x^2 - 4)}$ 的一个跳跃间断点是_____.

7. 若点 $(1, -2)$ 是曲线 $y = ax^3 - bx^2$ 的拐点, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.

8. 设反常积分 $\int_k^{+\infty} e^{-x} dx = \frac{1}{2}$, 则常数 $k =$ _____.

9. 曲线 $y = \sin^{\frac{2}{3}} x$ ($0 \leq x \leq \pi$) 与 x 轴所围平面图形绕 x 轴旋转一周所得立体体积 $V =$ _____ (用数值表示).

10. 微分方程 $y' = e^{x+y}$ 满足条件 $y(0) = 0$ 的特解为_____.

得分

三、计算下列各题 (本题分 4 小题, 每小题 6 分, 共计 24 分)

11. 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^{x+1}}{x^x} \sin \frac{1}{x}$.

12. 求曲线 $\rho = 2 \sin 2\theta$ 在 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 相应点处切线的直角坐标方程.

13. 设 $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$, 求 $f^{(n)}(x)$.





14. 求函数 $y = x^x (x > 0)$ 的极值.

得分

四、计算下列积分(本题分 2 小题, 每小题 6 分, 共计 12 分)

15. $\int x \cos 2x dx$

16. 设 $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0, \\ 1+x^2, & x < 0, \end{cases}$ 求 $\int_1^3 f(x-2) dx$

得分

五、应用题(本题分 2 小题, 每小题 7 分, 共计 14 分)

17. 有一三角形闸门竖直放在水中, 闸门上底长为 a 米, 高为 h 米, 上底与水面平齐, 求闸门一个侧面所受的水压力.(水的密度设为 ρ)



18. 连接两点 $A(0,1)$, $B(1,0)$ 的一条简单曲线, 它位于弦 AB 的上方, $P(x,y)$ 为曲线上的任一点, 已知曲线 AP 与弦 AP 所围图形的面积为 $\frac{1}{4}x^4$, 求该曲线的方程.

得分

六、证明题(本题分 2 小题, 每小题 5 分, 共计 10 分)

19. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续, 在开区间 $(0,1)$ 内可导, 且满足

$$f(1) = 2 \int_0^1 xf(x) dx, \quad \text{证明: 至少存在一点 } \xi \in (0,1), \quad \text{使得}$$

$$\xi'(\xi) + f(\xi) = 0.$$

20. (1) 证明: 当 $x > 0$ 时, $\arctan x < x$;

(2) 设 $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \arctan x_n$, $n = 1, 2, \dots$, 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.



《高等数学 A》期末

院(系) _____ 班级 _____ 学号 _____ 姓名 _____

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

一、选择题 (本题分 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分)

得分	
----	--

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\cos x - \cos 2x$ 是 x^2 的 (B)

- (A) 高阶无穷小 (B) 同阶无穷小, 但不等价无穷小
(C) 低阶无穷小 (D) 等价无穷小

2. 曲线 $y = \frac{x^2 - 3x + 4}{x^2 - 5x + 6}$ 的渐近线共有 (C)

- (A) 1 条 (B) 2 条 (C) 3 条 (D) 4 条

3. 设 $f(x) = \begin{cases} ae^x, & x < 0 \\ b + \ln(1+x), & x \geq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导, 则 (B)

- (A) $a = -1, b = -1$ (B) $a = 1, b = 1$
(C) $a = 2, b = 2$ (D) $a = 2, b = 1$

4. 方程 $x^5 + x^3 - k = 0$ (常数 $k > 0$) 正根的个数为 (C)

- (A) 5 个 (B) 3 个 (C) 1 个 (D) 不能确定

5. 设函数 $f(x)$ 的一个原函数为 $\sin 2x$, 则 $\int f'(2x)dx =$ (A)

- (A) $\cos 4x + C$ (B) $\frac{1}{2}\cos 4x + C$ (C) $2\cos 4x + C$ (D) $\sin 4x + C$

二、填空题 (本题分 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分)

得分	
----	--

装订线内不要答题
自觉遵守考试规则, 诚信考试, 绝不作弊

6. 函数 $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{|x|(x^2 - 4)}$ 的一个跳跃间断点是 $x = 0$

7. 若点 $(1, -2)$ 是曲线 $y = ax^3 - bx^2$ 的拐点, 则 $a = 1$, $b = 3$

8. 设反常积分 $\int_k^{+\infty} e^{-x} dx = \frac{1}{2}$, 则常数 $k = \ln 2$.

9. 曲线 $y = \sin^{\frac{3}{2}} x$ ($0 \leq x \leq \pi$) 与 x 轴所围图形绕 x 轴旋转一周所得立体体积 $V = \frac{4\pi}{3}$ (用数值表示).

10. 微分方程 $y' = e^{x+y}$ 满足条件 $y(0) = 0$ 的特解为 $e^x + e^{-y} = 2$.

得分

三、计算下列各题 (本题分 4 小题, 每小题 6 分, 共计 24 分)

11. 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^{x+1}}{x^x} \sin \frac{1}{x}$

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \cdot \frac{x+1}{x} \cdot \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

$= e \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

12. 求曲线 $\rho = 2 \sin 2\theta$ 在 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 相应点处切线的直角坐标方程.

解 曲线 $\begin{cases} x = 2 \sin 2\theta \cos \theta \\ y = 2 \sin 2\theta \sin \theta \end{cases}$, $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时, $\begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = \sqrt{2} \end{cases} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{2 \cos 2\theta \sin \theta + \sin 2\theta \cos \theta}{2 \cos 2\theta \cos \theta - \sin 2\theta \sin \theta}$, $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\theta = \frac{\pi}{4}} = -1 \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

所求方程为 $x + y = 2\sqrt{2} \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

13. 设 $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$, 求 $f^{(n)}(x)$.



解 $f(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}, \dots\dots\dots 2 \text{分}$

$f'(x) = (-1)(x-2)^{-2} - (-1)(x-1)^{-2}, \dots\dots\dots 1 \text{分}$

$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! \left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}} \right] \dots\dots\dots 3 \text{分}$

14. 求函数 $y = x^x (x > 0)$ 的极值.

解 函数 $y = e^{x \ln x}, y' = e^{x \ln x} (\ln x + 1)$. 令 $y' = 0$ 得 $x = \frac{1}{e} \dots\dots\dots 2 \text{分}$

当 $0 < x < \frac{1}{e}$ 时, $y' < 0$, 当 $x > \frac{1}{e}$ 时, $y' > 0, \dots\dots\dots 2 \text{分}$

故函数 $y = x^x$ 当 $x = \frac{1}{e}$ 时取极小值 $y(\frac{1}{e}) = e^{-\frac{1}{e}} \dots\dots\dots 2 \text{分}$

得分

四、计算下列积分(本题分 2 小题, 每小题 6 分, 共计 12 分)

15. $\int x \cos 2x dx$

解 $\int x \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int x d \sin 2x$

$$= \frac{1}{2} x \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx \dots\dots\dots 4 \text{分}$$

$$= \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C \dots\dots\dots 2 \text{分}$$

16. 设 $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0, \\ 1+x^2, & x < 0, \end{cases}$ 求 $\int_1^3 f(x-2) dx$

解 令 $x-2=t$, 原式 $= \int_{-1}^1 f(t) dt \dots\dots\dots 2 \text{分}$

$$= \int_{-1}^0 (1+t^2) dt + \int_0^1 e^{-t} dt \dots\dots\dots 2 \text{分}$$

$$= \frac{7}{3} - \frac{1}{e} \dots\dots\dots 2 \text{分}$$





得分	
----	--

五、应用题(本题分2小题, 每小题7分, 共计14分)

17. 有一三角形闸门竖直放在水中, 闸门上底长为 a 米, 高为 h 米, 上底与水面平齐, 求闸门一个侧面所受的水压力.(水的密度设为 ρ)

解 以三角形闸门高为 x 轴(向下为正向), 以水面为 y 轴, 建立坐标系, 取积分变量为 x , 则积分区间是 $[0, h]$, 闸门上任取一水平小条, 即梯形 $ABCD$, 其高为 dx ,

底长 $\overline{AB} = \frac{a}{h}(h-x)$, 小梯形面积近似为 (用矩形面积代替)

$$dA = \frac{a}{h}(h-x)dx, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

闸门受到的压力微元为 $dP = \rho g \frac{a}{h}(h-x)xdx$, $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

三角形闸门所受到的水压力为 $P = \int_0^h \rho g \frac{a}{h}(h-x)xdx = \frac{\rho g a h^2}{6} \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

18. 连接两点 $A(0,1)$, $B(1,0)$ 的一条简单曲线, 它位于弦 AB 的上方, $P(x,y)$ 为曲线上的任一点, 已知曲线 λP 与弦 AP 所围图形的面积为 $\frac{1}{4}x^4$, 求该曲线的方程.

解 由题意, $\int_0^x y(x)dx - \frac{1}{2}(1+y)x = \frac{1}{4}x^4 \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

化简得 $y' - \frac{1}{x}y = -\frac{1}{2} - 2x^2 \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

通解为 $y = e^{-\int \frac{1}{x}dx} [C + \int (-\frac{1}{2} - 2x^2)e^{\int \frac{1}{x}dx}] \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

$$= Cx + 1 - x^3 \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

又 $y(1) = 0$, $\therefore C = 0$, 故所求方程为 $y = 1 - x^3 \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

得分	
----	--

六、证明题(本题分2小题, 每小题5分, 共计10分)

19. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续, 在开区间 $(0,1)$ 内可导, 且满足

$f(1) = 2 \int_0^1 xf'(x)dx$, 证明: 至少存在一点 $\xi \in (0,1)$, 使得

$$f'(\xi) + f(\xi) = 0.$$



证明：令 $F(x) = xf(x)$ ，.....1分

由积分中值定理，存在 $\xi_1 \in [0, \frac{1}{2}]$ ，使得

$$F(1) = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} F(x) dx = 2F(\xi_1)(\frac{1}{2} - 0) = F(\xi_1) \dots\dots\dots 2分$$

$F(x)$ 在 $[\xi_1, 1]$ 上满足罗尔定理的条件，故存在 $\xi \in (\xi_1, 1) \subset (0, 1)$ ，使得

$$F'(\xi) = 0, \text{ 即 } \xi f'(\xi) + f(\xi) = 0 \dots\dots\dots 2分$$

20. (1) 证明：当 $x > 0$ 时， $\arctan x < x$ ：

(2) 设 $x_1 = 1, x_{n+1} = \arctan x_n, n = 1, 2, L$ ，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 。

$$\text{证 (1) 令 } f(x) = \arctan x - x, f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 = -\frac{x^2}{1+x^2} < 0, \dots\dots\dots 2分$$

所以 $x > 0$ 时， $f(x)$ 单减， $f(x) < f(0) = 0$ ，即 $\arctan x < x$ 。.....1分

(2) 由递推关系知 $x_1 = 1 > 0, x_2 = \arctan x_1 = \frac{\pi}{4} > 0, x_3 = \arctan x_2 > 0, L$ ，以此

类推，一般地有 $x_n > 0, n = 1, 2, L$ 。由(1)可得 $x_{n+1} = \arctan x_n < x_n$ ，即数列 $\{x_n\}$ 单

调递减，从而数列 $\{x_n\}$ 单调有界，由单调有界准则知数列 $\{x_n\}$ 收敛。.....1分

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ，则有 $a = \arctan a$ ，解得 $a = 0$ ，所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ 。.....1分



《高等数学 A》

院(系) _____ 班级 _____ 学号 _____ 姓名 _____

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

一、选择题 (本题分 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分)

得分

1、设 $x \rightarrow x_0$ 时, $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x)$ 均为无穷小量, 且 $\alpha(x) = o[\gamma(x)], \beta(x)$

$$-\gamma(x), \text{ 则 } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x) + \gamma(x)}{\beta(x)} = \quad (\quad)$$

(A) 0 (B) 1 (C) 不为零的常数 (D) ∞ 2、 $x=0$ 是函数 $f(x) = \frac{1}{1-e^x}$ 的 $\quad (\quad)$

(A) 连续点 (B) 可去间断点 (C) 跳跃间断点 (D) 无穷间断点

3、函数 $f(x) = (x^2 - x)|x^2 - x - 2|$ 的不可导点的个数是 $\quad (\quad)$

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

4、设 $f(x)$ 二阶可导, 且 $f'(x) > 0, f''(x) > 0$, 则当 $\Delta x > 0$ 时, 有 $\quad (\quad)$ (A) $\Delta y > dy > 0$ (B) $\Delta y < dy < 0$ (C) $dy > \Delta y > 0$ (D) $dy < \Delta y < 0$ 5、设 $f(x) = \int_0^x \sin(t-x)dt$, 则 $f'(x) = \quad (\quad)$ (A) 0 (B) $\sin x$ (C) $-\sin x$ (D) $1 - \cos x$

二、填空题 (本题分 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分)

得分

6、函数 $f(x) = x^3 + 2x + 1$ 的零点个数为 $\quad$ 7、曲线 $y = x \ln(e + \frac{1}{x})$ 的斜渐近线方程为 $\quad$

8、已知反常积分 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p}$ 收敛, 则参数 p 的取值范围是 _____.

9、曲线 $y = \sin x$ ($\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$) 与直线 $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$ 所围平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积 $V =$ _____.

10、微分方程 $y' + y = e^{-x} \cos x$ 满足 $y(0) = 0$ 的解是 _____.

三、计算下列各题 (本题分4小题, 每小题6分, 共计24分)

得分

11、求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x}}$

12、设 $y = y(x)$ 由方程 $xy + 2 \ln x = y'$ 确定, 求 $y = y(x)$ 在 $x = 1$, $y = 1$ 处的二阶导数.

13、设 $f(x) = x^2 \ln(1+x)$, 求 $f^{(n)}(0)$.



14、试求函数 $f(x) = x - \ln x$ 的极值.

得分

四、计算下列积分(本题分2小题,每小题7分,共计14分)

15、 $\int x \arctan x dx$

16、 $\int_0^1 \frac{dx}{x + \sqrt{1-x^2}}$

得分

五、应用题(本题分2小题,每小题6分,共计12分)

17、设有一上口直径为 R , 高为 h 的圆柱形容器内盛满了某种液体, 求将容器中的液体全部吸出所做的功。(液体的密度设为 ρ).



18. 设平面曲线 L 上任一点 $P(x, y)$ ($x > 0$) 到坐标原点的距离恒等于该点处的切线在 y 轴上的截距, 且曲线 L 经过点 $(\frac{1}{2}, 0)$, 试求曲线 L 的方程.

得分	

六、证明题(本题分 2 小题, 每小题 5 分, 共计 10 分)

19. 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 内可导, 证明:

$\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.

20. (1) 证明: 当 $x > 0$ 时, $\ln(1+x) < x$; (2) 设数列 $u_n = \int_0^1 |\ln t| [(\ln Q + t)]^n dt$,

试求 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.



《高等数学 A》

答案

一、选择题 (本题分 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分)

1、(B) 2、(C) 3、(B) 4、(A) 5、(C)

二、填空题 (本题分 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分)

6、1 个 7、 $y = \ddot{x} + \frac{1}{e}$ 8、 $p > 1$ 9、 $\frac{\pi^2}{4}$ 10、 $y = e^{-x} \sin x$

三、计算下列各题 (本题分 4 小题, 每小题 6 分, 共计 24 分)

11、解: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} \left(\frac{\sin x}{x} - 1 \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - x}{x^3}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - 1}{3x^2}} = e^{-\frac{1}{6}}$

12、解: 方程两边对 x 求导, 得 $y + xy' + \frac{2}{x} = 4y^3 - y'$, 代入 $x=1, y=1$, 得 $y'=1$;

再对 x 求导, 得 $2y' + xy'' - \frac{2}{x^2} = 12y^2 \cdot (y')^2 + 4y^3 \cdot y''$, 代入 $x=1, y=1, y'=1$,

得 $y''|_{x=1} = -4$.

13、解: 由莱布尼茨公式, 以及 $[\ln(1+x)]^{(k)} = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$ (k 为正整数)

得 $f^{(n)}(x) = x^2 \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n} + 2nx \frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{(1+x)^{n-1}} + n(n-1) \frac{(-1)^{n-3}(n-3)!}{(1+x)^{n-2}}$

所以 $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-3} n(n-1)(n-3)! = \frac{(-1)^{n-1} n!}{n-2}$

14、解: $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$, 令 $f'(x) = 0 \Rightarrow x=1$, $f''(1) = 1 > 0$, 故 $f(1)=1$ 为函数 $f(x)$

的极小值.

四、计算下列积分 (本题分 2 小题, 每小题 7 分, 共计 14 分)

15、解: $\int x \arctan x dx = \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \right) \arctan x - \frac{x}{2} + C$

16、解: 令 $x = \sin t$ ($-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$), 则有



$$\int_0^1 \frac{dx}{x + \sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t + \cos t}{\sin t + \cos t} dt = \frac{\pi}{4}$$

应用题(本题分2小题, 每小题6分, 共计12分)

解: 以圆柱形容器的中轴线与上截面的交点为原点, 中轴为 x 轴, 方向向下建

坐标系, 则 $dw = x \cdot \rho g \cdot \pi R^2 dx$, 故所求功为: $w = \pi \rho g \frac{R^2}{4} \int_0^H x dx = \frac{\pi \rho g R^2 H^2}{8}$ (焦)

5)

解: 设过 P 点的切线为 $Y - y = y'(X - x)$, 则在 y 轴上截距为 $y - xy'$, 由题

设知 $\sqrt{x^2 + y^2} = y - xy'$, 令 $u = \frac{y}{x}$, 方程可化为 $\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = -\frac{dx}{x}$, 解之得:

$y + \sqrt{x^2 + y^2} = C$, 代入点 $(\frac{1}{2}, 0)$, 可解出 $C = \frac{1}{2}$, 故曲线 L 的满足的方程为:

$$y + \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}, \text{ 即 } y = \frac{1}{4} - x^2.$$

六、证明题(本题分2小题, 每小题5分, 共计10分)

19、证明: 设 $F(x) = [f(b) - f(a)]x - f(x)(b - a)$, 则 $F(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续,

在开区间 (a, b) 内可导, 又 $F(a) = af(b) - bf(a) = F(b)$, 由罗尔定理, 得 $\exists \xi \in (a, b)$,

使得 $F'(\xi) = 0$, 即 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.

20、证明: 1) 令 $F(x) = x - \ln(1+x)$, 则 $F(0) = 0$, $F'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} > 0$ ($x > 0$),

当 $x > 0$ 时, $F(x)$ 单调递增, 所以, 当 $x > 0$ 时, $F(x) > F(0) = 0$, 即 $\ln(1+x) < x$.

2) 当 $t > 0$ 时, $\ln(1+t) < t \Rightarrow |\ln t| [\ln(1+t)]^n < t^n |\ln t|$, 故有

$$\int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt < \int_0^1 t^n |\ln t| dt.$$

$$\text{从而有 } 0 \leq u_n < \int_0^1 t^n |\ln t| dt = -\int_0^1 t^n \ln t dt = -\frac{1}{n+1} \int_0^1 \ln t dt^{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

由夹逼准则, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.



《高等数学 A》期末考试

院(系) _____ 班级 _____ 学号 _____ 姓名 _____

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分										

得分

一、选择题 (每小题 4 分, 共 20 分)

1. 设 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, $g(x) = 1 - \sqrt[3]{x}$, 则 $x \rightarrow 1$ 时, $f(x)$ 比 $g(x)$ 是 (A)

无穷小.

(A) 同阶 (B) 等价 (C) 高阶 (D) 低阶

2. 函数 $f(x)$ 在 x_0 的增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y - 3\Delta x}{\Delta x} = 0$, 则 (D)

(A) 当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, Δy 为 Δx 的高阶无穷小 (B) $f(x)$ 在 x_0 未必可微

(C) $f(x)$ 在 x_0 可微, 且 $dy = 3$ (D) $f(x)$ 在 x_0 可导, 且 $f'(x_0) = 3$

3. 若方程 $f(x)$ 满足方程 $x^2 f''(x) + 5x[f'(x)]^2 = 3 - e^{-x}$, 且 $f'(c) = 0$, ($c > 0$),

则 $x=c$ 是 $f(x)$ 的 (B)

(A) 极大值点 (B) 极小值点 (C) 拐点 (D) 拐点的横坐标

4. 设 y_1, y_2, y_3 是 $y' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ 的三个特解, 且 $\frac{y_1 - y_2}{y_2 - y_3} = k$, 则

方程的通解为: (C)

(A) $C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_3$ (B) $C_1 (y_1 - y_2) + C_2 (y_2 - y_3)$

(C) $C_1 (y_1 - y_2) + C_2 (y_2 - y_3) + y_3$ (D) $C_1 (y_1 + y_2) + C_2 (y_2 + y_3) + y_3$

5. 若连续函数满足 $f(x) = \int_0^{2x} f(\frac{t}{2}) dt + \ln 2$, 则 $f'(x)$ 等于 (A)

(A) $e^{2x} \ln 2$ (B) $2e^{2x} \ln 2$ (C) e^x (D) $2e^{2x}$



得分

二、填空题 (每小题4分, 共20分)

1、设函数 $f(x) = \frac{(x-1)\sin x}{|x|(x^2-1)}$, 则 $x=0$ 是其 跳跃 间断点.

2、 $\phi(x)$ 是单调连续函数 $f(x)$ 的反函数, 且 $f(1)=2, f'(1)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$, 则 $\phi'(2)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

3、若 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续, 且 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x-a} = 1$, 则 $f'(a) = \underline{1}$.

4、设 $f(x) = e^{-x}$, 则 $\int \frac{f(\ln x)}{x} dx = \underline{-\frac{1}{x} + C}$.

5、求以 $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$ 表示的函数为通解的微分方程为 $y'' - 3y' + 2y = 0$.

得分

三、计算下列极限 (每题6分, 共12分)

1、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} \right];$

解: $\frac{2n+2}{\sqrt{(n+1)^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} \leq \frac{2n+2}{\sqrt{n^2}}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+2}{\sqrt{(n+1)^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+2}{\sqrt{n^2}} = 2; \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} \right] = 2$

2、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x}$

解: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{2x^3}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(1 - \cos x)}{2x^3} = \frac{1}{4}$

得分

四、计算下列各题 (每题6分, 共18分)

1. $\begin{cases} x = n(1+t^2) \\ y = -\arctan t \end{cases}$ 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$

解: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+t^2} \cdot \frac{t}{2} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1+t^2}{4t}$



2. $\int x \tan^2 x dx$

解: $\int x \tan^2 x dx = \int x(\sec^2 x - 1) dx = \int x d \tan x - \frac{x^2}{2} + C$

$= x \tan x + \ln |\cos x| - \frac{x^2}{2} + C$

3. $\int_{-1}^1 (\sin^3 x + 1)(e^x + e^{-x}) dx$

解: $\int_{-1}^1 (\sin^3 x + 1)(e^x + e^{-x}) dx = \int_{-1}^1 (e^x + e^{-x}) dx$

$= 2(e^x - e^{-x})$

得分 五、(本题6分)

$y'' + 4y = \frac{1}{2}(x + \cos 2x), y(0) = y'(0) = 0.$

解: $r^2 + 4 = 0, r = \pm 2i; \bar{y} = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$

设特解分别为 $y_1 = x + B; y_2 = x(C \sin 2x + D \cos 2x)$, 代入得

$A = C = \frac{1}{8}, B = D = 0; y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{8}x \sin 2x$

$y' = \frac{1}{16} \sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{8}x \sin 2x$

得分 六、(本题8分)

设 $k > 0$ 求函数 $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + k, x \in (0, +\infty)$ 的零点个数.

解: $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e}, f'(e) = 0, \text{ 且 } f(e) = k > 0$

当 $x \in (0, e), f'(x) > 0, f(x)$ 递增, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$

当 $x \in (e, +\infty), f'(x) < 0, f(x)$ 递减, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

则 $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + k, x \in (0, +\infty)$ 有两个零点.



得分

七、(本题 8 分)在曲线 $y = x^2 (x \geq 0)$ 上某点 A 处作一切线,使之与曲线及 x 轴所围图形面积为 $\frac{1}{12}$, 试求: (1) 切点 A 的坐标和过 A 的切线方程; (2) 由上述所围图形绕 x 轴旋转一周所生成的旋转体体积.

解: 设点 (x_0, x_0^2) , 切线方程 $y - x_0^2 = 2x_0(x - x_0)$, 与 x 坐标轴交于 $(\frac{x_0}{2}, 0)$

$$S = \int_0^{x_0} x^2 dx - \frac{x_0^2}{4} = \frac{1}{12}, \quad x_0 = 1; \text{ 切点 } (1, 1), \text{ 切线方程 } y = 2x - 1.$$

$$V = \int_0^1 \pi x^4 dx - \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{30}.$$

得分

八、(本题 8 分)一物体按规律 $x = ct^{\frac{2}{3}}$ 做直线运动,介质的阻力与速度的平方成正比,求物体由 $x=0$ 移到 $x=a$ 时克服介质阻力所做的功.

$$\text{解: } W = \int_0^a k(3ct^{\frac{2}{3}})^2 dx = \int_0^a 9kc^{\frac{2}{3}} x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{27}{7} kc^{\frac{2}{3}} a^{\frac{7}{3}}$$

得分

九、附加题 (本题 10 分, 强化班必做, 其他班可选做)

对一切实数 t , $f(t)$ 连续, 且 $f(t) > 0$, $f(-t) = f(t)$, 函数

$$F(x) = \int_{-x}^x |x-t| f(t) dt, \quad x \in (-a, a), \text{ 试回答下列问题:}$$

(1) 证明 $F'(x)$ 单调增加; (2) 当 x 取何值时, $F(x)$ 取得最小值; (3) 若 $F(x)$

最小值可表示为 $f(a) - a^2 - 1$, 试求 $f(t)$.

$$\text{解: (1) } F(x) = \int_{-x}^x (x-t) f(t) dt + \int_x^a (t-x) f(t) dt, \quad F'(x) = \int_{-x}^x f(t) dt - \int_x^a f(t) dt \\ = \int_{-x}^x f(t) dt - \int_x^a f(t) dt - \int_x^a f(t) dt = \int_{-x}^x f(t) dt - 2 \int_x^a f(t) dt, \quad F'(x) = 2f(x) > 0.$$

$$(2) F'(x) = 0, x = 0, \quad F'(0) = 2f(0) > 0.$$

$$F(0) = \int_{-a}^a |t| f(t) dt = 2 \int_0^a t f(t) dt \text{ 为最小值.}$$

$$(3) 2 \int_0^a t f(t) dt = f(a) - a^2 - 1, \quad 2af(a) = f(a) - 2af(0) = 1, \text{ 解方程得}$$

$$f(t) = 2e^t - 1.$$

自觉遵守考试规则, 诚信考试, 绝不作弊



《高等数学 A》

院(系) _____ 班级 _____ 学号 _____ 姓名 _____

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

装
订
线
内
不
要
答
题

得分

一、选择题 (本题分 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分)

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\cos x - \cos 2x$ 是 x^2 的 (B)

- (A) 高阶无穷小 (B) 同阶无穷小, 但不等价无穷小
(C) 低阶无穷小 (D) 等价无穷小

2. 曲线 $y = \frac{x^2 - 3x + 4}{x^2 - 5x + 6}$ 的渐近线共有 (C)

- (A) 1 条 (B) 2 条 (C) 3 条 (D) 4 条

3. 设 $f(x) = \begin{cases} ae^x, & x < 0 \\ b + \ln(1+x), & x \geq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导, 则 (B)

- (A) $a = -1, b = -1$ (B) $a = 1, b = 1$

- (C) $a = 2, b = 2$ (D) $a = 2, b = 1$

4. 方程 $x^5 + x^3 - k = 0$ (常数 $k > 0$) 正根的个数为 (C)

- (A) 5 个 (B) 3 个 (C) 1 个 (D) 不能确定

5. 设函数 $f(x)$ 的一个原函数为 $\sin 2x$, 则 $\int f'(2x) dx =$ (A)

- (A) $\cos 4x + C$ (B) $\frac{1}{2} \cos 4x + C$ (C) $2 \cos 4x + C$ (D) $\sin 4x + C$

得分

二、填空题 (本题分 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分)



6. 函数 $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{|x|(x^2 - 4)}$ 的一个跳跃间断点是 $x = 0$

7. 若点 $(1, -2)$ 是曲线 $y = ax^3 - bx^2$ 的拐点, 则 $a = 1, b = 3$

8. 设反常积分 $\int_k^{+\infty} e^{-x} dx = \frac{1}{2}$, 则常数 $k = \ln 2$.

9. 曲线 $y = \sin^{\frac{3}{2}} x$ ($0 \leq x \leq \pi$) 与 x 轴所围图形绕 x 轴旋转一周所得立体体积 $= \frac{4\pi}{3}$ (用数值表示).

10. 微分方程 $y' = e^{x+y}$ 满足条件 $y(0) = 0$ 的特解为 $e^x + e^{-y} = 2$.

得分

三、计算下列各题 (本题分 4 小题, 每小题 6 分, 共计 24 分)

11. 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^{x+1}}{x^x} \sin \frac{1}{x}$

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \cdot \frac{x+1}{x} \cdot \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$ 4 分
 $= e$ 2 分

12. 求曲线 $\rho = 2 \sin 2\theta$ 在 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 相应点处切线的直角坐标方程.

解 曲线 $\begin{cases} x = 2 \sin 2\theta \cos \theta \\ y = 2 \sin 2\theta \sin \theta \end{cases}, \theta = \frac{\pi}{4} \text{ 时, } \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = \sqrt{2} \end{cases}$ 2 分

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{2 \cos 2\theta \sin \theta + \sin 2\theta \cos \theta}{2 \cos 2\theta \cos \theta - \sin 2\theta \sin \theta} \Big|_{\theta = \frac{\pi}{4}} = -1$ 3 分

所求方程为 $x + y = 2\sqrt{2}$ 1 分

13. 设 $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$, 求 $f^{(n)}(x)$.



解 $f(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$,2分

$f'(x) = (-1)(x-2)^{-2} - (-1)(x-1)^{-2}$,1分

$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! \left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}} \right]$ 3分

14. 求函数 $y = x^x (x > 0)$ 的极值.

解 函数 $y = e^{x \ln x}$, $y' = e^{x \ln x} (\ln x + 1)$. 令 $y' = 0$ 得 $x = \frac{1}{e}$ 2分

当 $0 < x < \frac{1}{e}$ 时, $y' < 0$. 当 $x > \frac{1}{e}$ 时, $y' > 0$,2分

故函数 $y = x^x$ 当 $x = \frac{1}{e}$ 时取极小值 $y(\frac{1}{e}) = e^{-\frac{1}{e}}$ 2分

得分

四、计算下列积分(本题分2小题, 每小题6分, 共计12分)

15. $\int x \cos 2x dx$

解 $\int x \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int x d \sin 2x$
 $= \frac{1}{2} x \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx$ 4分
 $= \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C$ 2分

16. 设 $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0, \\ 1+x^2, & x < 0, \end{cases}$ 求 $\int_1^3 f(x-2) dx$

解 令 $x-2=t$, 原式 $= \int_{-1}^1 f(t) dt$ 2分

$= \int_{-1}^0 (1+t^2) dt + \int_0^1 e^{-t} dt$ 2分
 $= \frac{7}{3} - \frac{1}{e}$ 2分



得分

五、应用题(本题分2小题, 每小题7分, 共计14分)

17. 有一三角形闸门竖直放在水中, 闸门上底长为 a 米, 高为 h 米, 上底与水面平齐, 求闸门一个侧面所受的水压力. (水的密度设为 ρ)

解 以三角形闸门高为 x 轴(向下为正向), 以水面为 y 轴, 建立坐标系, 取积分变量为 x , 则积分区间是 $[0, h]$, 闸门上任取一水平小条, 即梯形 $ABCD$, 其高为 dx ,

底长 $\overline{AB} = \frac{a}{h}(h-x)$, 小梯形面积近似为(用矩形面积代替)

$$dA = \frac{a}{h}(h-x)dx, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

闸门受到的压力微元为 $dP = \rho g \frac{a}{h}(h-x)xdx, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

三角形闸门所受到的水压力为 $P = \int_0^h \rho g \frac{a}{h}(h-x)xdx = \frac{a\rho gh^2}{6} \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

18. 连接两点 $A(0,1)$, $B(1,0)$ 的一条简单曲线, 它位于弦 AB 的上方, $P(x,y)$ 为曲线上的任一点, 已知曲线 $\widehat{AP}$ 与弦 AP 所围图形的面积为 $\frac{1}{4}x^4$, 求该曲线的方程.

解 由题意, $\int_0^x y(x)dx - \frac{1}{2}(1+y)x = \frac{1}{4}x^4 \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

化简得 $y' - \frac{1}{x}y = -\frac{1}{x} - 2x^2 \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

通解为 $y = e^{-\int \frac{1}{x}dx} [C + \int (-\frac{1}{x} - 2x^2)e^{\int \frac{1}{x}dx} dx] \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

$$= Cx + 1 - x^3 \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

又 $y(1)=0$, $\therefore C=0$, 故所求方程为 $y=1-x^3 \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

得分

六、证明题(本题分2小题, 每小题5分, 共计10分)

19. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续, 在开区间 $(0,1)$ 内可导, 且满足

$$f(1) = 2 \int_0^1 xf(x)dx, \text{ 证明: 至少存在一点 } \xi \in (0,1), \text{ 使得}$$

$$\xi f'(\xi) + f(\xi) = 0.$$



《高等数学》

院(系) _____ 班级 _____ 学号 _____ 姓名 _____

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

得分

一、选择题 (本大题分 5 小题, 每题 3 分, 共 15 分)

1、当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列无穷小量关于 x 的阶数最高的是 (C)

- (A) $x^2(e^x - 1)$ (B) $1 - \cos x$
 (C) $\sqrt[3]{1+x^4} - 1$ (D) $\ln(1+2x)$

2、设 $f(x) = \begin{cases} x \sin(x^{-1}) & x < 0 \\ x^2 + 1 & x \geq 0 \end{cases}$, 则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的 (B)

- (A) 可去间断点 (B) 跳跃间断点 (C) 振荡间断点 (D) 无穷间断点

3、设 $f(x) = 6x^4 + x^3|x|$, 则使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数 n 为 (D)

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

4、设可导函数 $f(x)$ 满足 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x} = 1$, 则 (A)

- (A) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点 (B) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点
 (C) $x=0$ 是曲线 $y=f(x)$ 拐点的横坐标
 (D) $x=0$ 既不是曲线 $y=f(x)$ 拐点的横坐标, 也不是极值点

5、以 $y_1 = xe^x$; $y_2 = e^{-x}$ 为特解的最低阶常系数线性齐次微分方程是 (B)

- (A) $y'' - y = 0$ (B) $y''' - y'' - y' + y = 0$
 (C) $y''' - y'' + y' - y = 0$ (D) $y^{(4)} - 2y'' + y = 0$



得分

二、填空题 (本大题分 5 小题, 每题 3 分, 共 15 分)

1. 设 $f'(x_0)$ 存在, 则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(x_0+3h) - f^2(x_0-h)}{h} = 8f(x_0)f'(x_0)$.

2. $f(x) = xe^x$ 的 n 阶带皮亚诺余项的麦克劳林公式

$$x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \dots + \frac{x^n}{(n-1)!} + o(x^n).$$

3. 在 $[a, b]$ 上 $f(x), f'(x), f''(x)$ 均大于零, 则 $S_1 = \int_a^b f(x)dx$; $S_2 = f(b)(b-a)$;

$$S_3 = \frac{1}{2}[f(b) + f(a)](b-a) \text{ 的大小顺序 } S_1 < S_3 < S_2.$$

4. 广义积分 $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ 收敛, 则 p 的取值范围是 $p < 1$.

5. 方程 $xdy + (y - 3x^2)dx = 0$ 满足 $y(1) = 1$ 的解是 $y = \frac{1}{x}(\sqrt{1+4x^3}) \cdot x^2$.

得分

三、计算下列极限 (每题 7 分, 共 14 分)

$$1. \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \frac{n!}{n^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \ln \frac{i}{n} = \int_0^1 \ln x dx = -1$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = -\frac{1}{6}$$

得分

四. 设 $y = y(x)$ 由方程 $\begin{cases} x = \int_0^{t+1} e^{-u} du \\ e^y \sin t - y + 1 = 0 \end{cases}$ 确定, 求 $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0}$. (本题 7 分)

$$\text{解: } \frac{dx}{dt} \Big|_{t=0} = e^{-(t+1)}(2t+1) \Big|_{t=0} = 1$$

$$e^y \frac{dy}{dt} \sin t + e^y \cos t - \frac{dy}{dt} = 0 \quad \text{将 } t=0, x=0, y=1 \text{ 代入}$$

$$\frac{dy}{dt} \Big|_{t=0} = e \quad \frac{dy}{dx} \Big|_{x=0} = e$$



得分

五、计算下列积分(每题 7 分, 共 14 分)

1. $\int x \sin 2x dx$

$$= -\frac{1}{2}x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

2. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}} dx$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$
 $x = \tan t \quad dx = \sec^2 t dt$
 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sec^3 t} \sec^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos t dt$
 $= \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

得分

六、已知曲线 $y = f(x)$, 点 $(3, 2)$ 是它的拐点, 曲线在原点和 $(3, 2)$ 点的切线交于点 $(2, 4)$, 计算 $\int_0^3 (x^2 + x) f'''(x) dx$. (本题 8 分)

解: $\int_0^3 (x^2 + x) f'''(x) dx = (x^2 + x) f''(x) \Big|_0^3 - \int_0^3 (2x + 1) f''(x) dx$

$$= -(2x + 1) f'(x) \Big|_0^3 + \int_0^3 f'(x) dx$$

$$= -(7 \times (-2) - 2) + 2 f(x) \Big|_0^3$$

$$= 16 + 2[f(3) - f(0)] = 16 + 4 = 20$$

$f(3) = 2$

$f'(0) = 2; f'(3) = -2$

$f'(0) = \frac{4-0}{2-0} = 2$

$f'(3) = \frac{4-2}{2-3} = -2$

$\int_0^3 (x^2 + x) f'''(x) dx$
 $= (x^2 + x) f''(x) \Big|_0^3 - \int_0^3 (2x + 1) f''(x) dx$
 $= -(2x + 1) f'(x) \Big|_0^3 + \int_0^3 f'(x) dx$
 $= -(7 \times (-2) - 2) + 2 f(x) \Big|_0^3$
 $= 16 + 2[f(3) - f(0)] = 16 + 4 = 20$

得分

七、证明: 当 $-\infty < x < +\infty$ 时, $1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \geq \sqrt{1+x^2}$. (本题 7 分)

证明: 令 $f(x) = 1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$

$f'(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \quad f'(0) = 0$

$f''(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad f''(0) = 1 > 0$

$f(x)$ 在 $x=0$ 取得极小即为最小 $\Rightarrow f(x) \geq f(0) = 0$



得分

八、设某人自A点开车，沿直线行驶至B点，全长1000米，费时60秒，

证明：该车在途中某点的加速度的绝对值不小于 $\frac{10}{9} \text{ m/s}^2$ 。（本题6分）

证明：汽车运动中的位置函数为 $s(t)$ ，加速度为 $a(t) = s''(t)$ ， $s(0) = 0$ ，

$$s(60) = 1000, s'(0) = 0, s'(60) = 0, \text{ 要证: } \exists \xi \in (0, 60), |s''(\xi)| \geq \frac{10}{9}$$

$s(t)$ 在 $t = 0, t = 60$ 处的一阶泰勒公式：

$$s(t) = s(0) + s'(0)t + \frac{s''(\xi_1)}{2}t^2 = \frac{s''(\xi_1)}{2}t^2 \quad (1) \quad \text{其中 } \xi_1 \in (0, t)$$

$$s(t) = s(60) + s'(60)(t-60) + \frac{s''(\xi_2)}{2}(t-60)^2 = 1000 + \frac{s''(\xi_2)}{2}(t-60)^2 \quad (2)$$

$$\xi_2 \in (t, 60)$$

$$\text{在 (1), (2) 中令 } t = 30, \quad s(30) = \frac{s''(\xi_1)}{2}900 = 1000 + \frac{s''(\xi_2)}{2}900$$

$$s''(\xi_1) - s''(\xi_2) = \frac{20}{9} \quad 0 < \xi_1 < \xi_2 < 60, \text{ 下证: } \exists \xi \in (0, 60), |s''(\xi)| \geq \frac{10}{9}$$

反证：若对 $\forall t \in (0, 60), |s''(t)| < \frac{10}{9}$ ，则

$$|s''(\xi_1) - s''(\xi_2)| \leq |s''(\xi_1)| + |s''(\xi_2)| < \frac{20}{9} \text{ 与 } s''(\xi_1) - s''(\xi_2) = \frac{20}{9} \text{ 矛盾，得证}$$

得分

九、自 $(1, 0)$ 点作曲线 $y = \sqrt{x-2}$ 的切线，试求（1）该曲线和切线及 x 轴所围平面图形的面积；（2）该图形绕直线 $x=3$ 旋转一周所得旋转体体积；（3）曲线与 x 轴交点到切点一段的长度。（本题8分）

解：切线方程为 $y = \frac{1}{2}(x-1)$

$$(1) \text{ 面积: } A = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 - \int_2^3 \sqrt{x-2} dx = \frac{1}{3}$$

$$(2) V = \frac{4\pi}{3} - \pi \int_0^1 (3 - y^2 - 2)^2 dy = \frac{4\pi}{5}$$

$$(3) s = \int_0^1 \sqrt{1+x'^2} dy = \int_0^1 \sqrt{1+4y^2} dy = y\sqrt{1+4y^2} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{4y^2}{\sqrt{1+4y^2}} dy$$

$$= y\sqrt{1+4y^2} \Big|_0^1 - \int_0^1 \sqrt{1+4y^2} dy + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+4y^2}} dy$$

$$ds = \sqrt{1+y'^2} dx$$

$$dx = \sqrt{1+y'^2} dy$$



$$= \frac{1}{2} [y\sqrt{1+4y^2} + \frac{1}{2} \ln(2y + \sqrt{1+4y^2})] \Big|_0^1 = \frac{1}{2} [\sqrt{5} + \frac{1}{2} \ln(2+\sqrt{5})]$$

得分

十、试将 $\frac{d^2x}{dy^2} + (y + \sin x) \left(\frac{dx}{dy} \right)^3 = 0$ 变换为 $y = y(x)$ 所满足的微分方程, 并求出通解. (本题 6 分)

解 (1) 由反函数的求导公式 $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'}$, $\frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{y''}{y'^3}$ 代入原方程,

得 $y = y(x)$ 满足的微分方程 $y'' - y = \sin x$

(2) 特征方程为 $r^2 - 1 = 0$, $r_{1,2} = \pm 1$

它所对应的齐次方程的通解为 $Y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

设非齐次方程的一个特解为 $y^* = A \cos x + B \sin x$?

代入方程 $y'' - y = \sin x$ 可得 $A = 0, B = -\frac{1}{2}$

所以原方程的通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2} \sin x$

二阶常系数齐次线性微分方程
 $y'' + py' + qy = 0 \rightarrow r^2 + pr + q = 0$

① $\Delta > 0$

② $\Delta = 0$

③ $\Delta < 0$

$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
 $y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$
 $y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

非齐次

二步：
 1. 求齐次方程通解 y_h
 2. 求一个特解 y_p
 3. 求通解 $y = y_h + y_p$

类型二: $y'' + py' + qy = e^{\alpha x} [P_m(x) \cos \omega x + P_n(x) \sin \omega x]$

特解 $y^* = x^k e^{\alpha x} [R_m(x) \cos \omega x + R_n(x) \sin \omega x]$

$k = \begin{cases} 0 & \alpha \pm i\omega \text{ 不是齐次方程特征方程的根} \\ 1 & \dots \end{cases}$

$m = \max\{u, v\}$

类型一: $y'' + py' + qy = P(x) e^{\alpha x}$

特解 $y^* = x^k Q(x) e^{\alpha x}$

$k = \begin{cases} 0 & \alpha \text{ 和齐次方程 2 个特征根都不等} \\ 1 & \alpha \text{ 和其中一个相等} \\ 2 & \alpha \text{ 和 2 个特征根相等} \end{cases}$
 (因为是与 $P(x)$ 同次的多项式, 代入非齐次方程后与 $P(x)$ 的最高次数相同)

47



《高等数学 A》

答案

院(系) _____ 班级 _____ 学号 _____ 姓名 _____

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分										

得分

一、选择题 (每小题 4 分, 共 20 分)

1. 设 $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时成立的是 (A)

(A) $f(x)$ 与 x 是等价无穷小; (B) $f(x)$ 与 x 是同阶但不等价无穷小;

(C) $f(x)$ 是比 x 高阶的无穷小; (D) $f(x)$ 是比 x 低阶的无穷小

2. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ a + b \cos x & x > 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导, 则 (B)

(A) $a=-2, b=2$; (B) $a=2, b=-2$; (C) $a=-1, b=1$; (D) $a=1, b=-1$

3. 函数 $y = 6x + \frac{3}{x} - x^3$ 在 $x=1$ 处有 (C)

(A) 极小值; (B) 极大值; (C) 拐点; (D) 既无拐点又无极值

4. 设 y_1, y_2, y_3 是 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ 的三个特解, 且 $\frac{y_1 - y_2}{y_2 - y_3} \neq k$, 则

方程的通解可为 (C)

(A) $C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_3$; (B) $C_1(y_1 - y_2) + C_2(y_2 - y_3)$

(C) $C_1(y_1 - y_2) + C_2(y_2 - y_3) + \frac{2y_1 + y_2}{3}$

(D) $C_1(y_1 - y_2) + C_2(y_2 - y_3) + y_1 + y_2 + y_3$

5. 设 $I = t \int_0^t f(tx) dx$, 其中 $f(x)$ 连续, $t > 0, s > 0$, 则 I 的值 (D)

(A) 依赖于 s, t ; (B) 依赖于 t, x , 不依赖于 s

(C) 依赖于 s, t, x ; (D) 依赖于 s , 不依赖于 t

$$tx = u, \quad t = \frac{u}{x}$$

$$\int_0^s f(u) du$$



得分

二、填空题 (每小题 4 分, 共 20 分)

1. $x=0$ 是函数 $f(x) = \frac{1}{1-e^x}$ 的 跳跃 间断点.

2. $d(\sqrt{1+x^2}) = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} d(\ln x).$

3. 设 $y = x^2 e^{-x}$, 则其单减区间 $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty).$

4. 已知 $\int f(x) dx = \arcsin x + C$, 则 $\int \frac{1}{f(x)} dx = -\frac{1}{3} \sqrt{1-x^2} + C.$

5. 以 $y = xe^x$ 为特解的二阶常系数齐次线性方程为 $y'' - 2y' + y = 0.$

得分

三、计算极限 (每题 5 分, 共 10 分)

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2})$

解: $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2})$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\frac{1}{1+(\frac{1}{n})^2} + \frac{1}{1+(\frac{2}{n})^2} + \dots + \frac{1}{1+(\frac{n}{n})^2}) = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{(\sqrt[3]{1+x^2} - 1)(e^{\sin x} - 1)}$

解: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{(\sqrt[3]{1+x^2} - 1)(e^{\sin x} - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot (\cos x - 1)}{\cos x \cdot \frac{x^2}{3} \cdot \sin x} = -\frac{3}{2}$

得分

四、计算下列各题 (每题 5 分, 共 15 分)

1. 设 $\begin{cases} x = 2te^t + 1 \\ y = t^3 - 3t \end{cases}$, 求 $\frac{dy}{dx} \Big|_{t=1}, \frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{t=1}$.

解: $\frac{dy}{dx} \Big|_{t=1} = \frac{3t^2 - 3}{2(e^t + te^t)} \Big|_{t=1} = 0; \frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{t=1} = \frac{d}{dt} (\frac{3(t^2-1)}{2(1+t)e^t}) \Big|_{t=1}$

$= \frac{3(2+3t-t^3)e^t}{2(1+t)^3 e^{3t}} \Big|_{t=1} = \frac{3}{8e^2}$

2. $\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx$

解: $\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx = \int \frac{x d \sin x}{\sin^3 x} = -\frac{1}{2} \int x d \sin^{-2} x = -\frac{1}{2} (\frac{x}{\sin^2 x} - \int \frac{1}{\sin^2 x} dx)$



$$= -\frac{1}{2} \frac{x}{\sin^2 x} - \frac{1}{2} \cot x + C$$

3. 设 $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ 1+x^2, & x < 0 \end{cases}$, 求 $\int_1^3 f(x-2)dx$

解: $\int_1^3 f(x-2)dx \xrightarrow{x-2=t} \int_{-1}^1 f(t)dt = \int_{-1}^0 (1+t^2)dt + \int_0^1 e^{-t}dt = \frac{7}{3} - e^{-1}$

得分

五、(本题 6 分)

求方程 $y'' + y = \frac{1}{2}(\cos x + \cos 3x)$ 的通解.

解: $r^2 + 1 = 0, r = \pm i$, 齐次方程通解 $\bar{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

$y_1' = x(A \cos x + B \sin x)$, 代入原方程得 $A = 0, B = \frac{1}{4}$

$y_2' = A \cos 3x + B \sin 3x$, 代入原方程得 $A = -\frac{1}{16}, B = 0$

原方程通解 $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{4}x \sin x - \frac{1}{16} \cos 3x$

得分

六、(本题 8 分)

讨论方程 $\ln x = \frac{x}{e} - \int_0^x \sqrt{1 - \cos 2x} dx$ 在 $(0, +\infty)$ 内实根的个数.

解: 设 $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + \int_0^x \sqrt{1 - \cos 2x} dx$

$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e}$, 当 $x \in (0, e)$, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 递增; 当 $x \in (e, +\infty)$, $f'(x) < 0$, $f(x)$

递减: $f(e) = \int_0^e \sqrt{1 - \cos 2x} dx > 0$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (\ln x - \frac{x}{e} + \int_0^x \sqrt{1 - \cos 2x} dx) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - \frac{x}{e} + \int_0^x \sqrt{1 - \cos 2x} dx) = -\infty$

所以 $f(x)$ 在 $(0, e)$ 和 $(e, +\infty)$ 各有仅有一个零点, 所以原方程在 $(0, +\infty)$ 内实根的个数为 2.

得分

七、(本题 7 分) 设曲线方程 $y = e^{-x} (x \geq 0)$, 在此曲线上求一点使得过该点

的切线与两坐标轴所围的平面区域面积最大.

解: 设切点为 (x_0, e^{-x_0}) , 过该点切线方程为 $y - e^{-x_0} = -e^{-x_0}(x - x_0)$

在两坐标轴得截距为 $(1+x_0)e^{-x_0}$ 和 $x_0 + 1$, 面积 $S = \frac{1}{2}(1+x_0)^2 e^{-x_0}$

令 $S'(x_0) = (1-x_0^2)e^{-x_0} = 0$, 得唯一极大值点 $(1, e^{-1})$.



得分

八、(本题6分) 有一个椭圆形薄板, 长半轴为 a , 短半轴为 b , 薄板垂直立于水中, 其短半轴与水面相齐, 求水对薄板的侧压力.

解: 设椭圆方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 分割区间 $[0, a]$, 在小区间 $[x, x+dx]$ 所对应的小

横条薄板上水压力为 $dF = \gamma x \cdot 2y dx = \gamma x \frac{2b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx$

$$F = \int_0^a \frac{2b\gamma}{a} x \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{2}{3} \gamma a^2 b$$

得分

九、(本题8分)

设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 连续, $f(0)=0, 0 < f'(x) < 1 (x \in (0, 1))$, 求证:

$$[\int_0^1 f(x) dx]^2 > \int_0^1 f^3(x) dx.$$

证明: 当 $x \in (0, 1)$ $f(0)=0, 0 < f'(x) < 1, \therefore f(x) > 0$,

$$\text{设 } F(x) = [\int_0^x f(t) dt]^2 - \int_0^x f^3(t) dt, \quad F(0) = 0$$

$$F'(x) = 2f(x)[\int_0^x f(t) dt] - f^3(x) = f(x)[2\int_0^x f(t) dt - f^2(x)]$$

$$\text{设 } g(x) = 2\int_0^x f(t) dt - f^2(x), \quad g(0) = 0$$

$$g'(x) = 2f(x) - 2f(x)f'(x) = 2f(x)[1 - f'(x)] > 0, \quad g(x) \text{ 递增}, \quad g(x) > 0, \text{ 进而 } F'(x) > 0, \quad F(x)$$

递增, $F(x) > 0$, 特别 $F(1) > 0$.



《高等数学 A (上)》

院(系) _____ 班级 _____ 学号 _____ 姓名 _____

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

自觉遵守考场规则，诚信考试，绝不作弊

得分

一、选择题 (本大题分 5 小题，每题 3 分，共 15 分)

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时， $\sin x \ln(1+x)$ 是 x^2 的 (B)

- (A) 同阶但不等价无穷小 (B) 等价无穷小
(C) 高阶无穷小 (D) 低阶无穷小

2. $x=0$ 是函数 $f(x) = \frac{x^3 - x}{\sin \pi x}$ 的 (C)

- (A) 跳跃间断点 (B) 振荡间断点 (C) 可去间断点 (D) 无穷间断点

3. 设函数 $f(x)$ 可微，且 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-h)}{2h} = 1$ ，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线斜率为 (B)

- (A) 1 (B) 2 (C) -1 (D) -2

4. 设在区间 $[a, b]$ 上 $f(x) > 0$ ， $f'(x) > 0$ ， $f''(x) > 0$ ，令 $S_1 = \int_a^b f(x) dx$ ，

$S_2 = f(b)(b-a)$ ， $S_3 = \frac{1}{2}[f(b) + f(a)](b-a)$ ，则有 (C)

- (A) $S_1 < S_2 < S_3$ (B) $S_3 < S_1 < S_2$ (C) $S_1 < S_3 < S_2$ (D) $S_2 < S_3 < S_1$

5. 微分方程 $y'' + y = x \cos 2x$ 的特解 y^* 的形式为 (B)

- (A) $a \cos 2x + b \sin 2x$ (B) $(ax+b) \cos 2x + (cx+d) \sin 2x$
(C) $x(a \cos 2x + b \sin 2x)$ (D) $x[(ax+b) \cos 2x + (cx+d) \sin 2x]$

得分

二、填空题 (本大题分 5 小题，每题 4 分，共 20 分)

1. 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x = 9$ ，则 $a = \ln 3$

2. 设 $y=y(x)$ 由方程 $x^3 - ax^2y^2 + by^3 = 0$ 确定，且 $y(1)=1, x=1$ 是驻点，则

$$a = \frac{3}{2}, b = \frac{1}{2}$$



3、设 $y = e^{\frac{1}{2}x^2}$, 该函数的单增区间为 $(-\infty, 0]$, 相应曲线的拐点为 $(\pm 1, e^{\frac{1}{2}})$

4、 $\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx = 1$

5、微分方程 $y' + xy = 0$ 的通解为 $y = Ce^{-\frac{1}{2}x^2}$

得分

三、计算下列各题 (每题 6 分; 共 18 分)

1、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n})$

解: $\frac{(1+n)n}{n^2+n} \leq \frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n} \leq \frac{(n+1)n}{n^2+1}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2(n^2+1)} = \frac{1}{2}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2(n^2+n)} = \frac{1}{2}$

由夹逼准则: $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n}) = \frac{1}{2}$

2、 $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \sin x})$

解: $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2 \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2} = -\frac{1}{6}$

3、设 $\begin{cases} x = \cos(t^2) \\ y = t \cos(t^2) - \int_1^t \frac{1}{2\sqrt{u}} \cos u du, t > 0 \end{cases}$ 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$

解: $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\cos t^2 - 2t^2 \sin t^2 - \frac{1}{2t} \cos t^2 \cdot 2t}{-2t \sin t^2} = t$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d(t)}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{-2t \sin t^2}$



得分

四、计算下列各题(每题 7 分, 共 14 分)

1. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^2}}$

2. $\int x \sin^2 x dx$

解: 令 $x = \tan t$

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^2}} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos t dt}{\frac{1}{\sin^2 t}}$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{d \sin t}{\sin^3 t} = -\frac{1}{\sin t} \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= -\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$= \int \frac{x}{2} dx - \frac{1}{2} \int x \cos 2x dx$$

$$= \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4} \int x d \sin 2x$$

$$= \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4} x \sin 2x - \frac{1}{8} \cos 2x + C$$

得分

五、(本题 7 分) 求微分方程 $y'' - 3y' + 2y = xe^{2x}$ 的通解.

解 特征方程为 $r^2 - 3r + 2 = 0$, 特征根为 $r_1 = 1, r_2 = 2$,

齐次方程的通解为 $Y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$,

设方程的特解: $y^* = x(b_0 x + b_1) e^{2x}$.

代入题设方程得 $2b_0 x + b_1 + 2b_0 = x$, 比较等式两端同次幂的系数 $b_0 = \frac{1}{2}, b_1 = -1$.

于是, 求得题设方程的一个特解 $y^* = x(\frac{1}{2}x - 1)e^{2x}$.

方程的通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + x(\frac{1}{2}x - 1)e^{2x}$.

得分

六、(本题 7 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, a]$ ($a > 0$) 上连续, 在 $(0, a)$ 上可

导, 且 $f(0) = f(a) = 0, f(\frac{a}{2}) = a$, 证明: 必有一点 $\xi \in (0, a)$, 使

得 $f'(\xi) = 1$ 成立.

证明: 令 $F(x) = f(x) - x$,

$$F(a) = f(a) - a = -a < 0, F(\frac{a}{2}) = f(\frac{a}{2}) - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} > 0$$

由零点定理: $\exists c \in (\frac{a}{2}, a)$ 使得 $F(c) = 0$

$F(x)$ 在 $[0, c]$ 上连续, 在 $(0, c)$ 上可导, $F(0) = F(c) = 0$ 由罗尔定理:

$\xi \in (0, c) \subset (0, a)$, 使得 $F'(\xi) = 0$, 即 $f'(\xi) = 1$



得分

七、(本题 6 分) 半径为 2 米的半球形水池, 盛满水, 要把池中水全部吸出需作多少功? (答案中保留 ρ, g, π)

$$\text{解: } dW = \rho g \pi x(4-x^2)dx$$

$$W = \int_0^2 \rho g \pi x(4-x^2)dx = 4\rho g \pi$$

得分

八、(本题 8 分) 设非负函数 $y = y(x) (x \geq 0)$ 满足微分方程 $xy'' - y' = -2$, 当此曲线过原点时, 其与直线 $x=1, y=0$ 围成的平面区域 D 的面积为 2. (1) 求曲线 $y = y(x)$. (2) 求 D 绕 y 轴旋转所得的旋转体的体积.

$$\text{解: (1) } y'' - \frac{1}{x}y' = -\frac{2}{x}, \quad y' = e^{\int -\frac{1}{x}dx} [C_1 + \int (-\frac{2}{x})e^{\int -\frac{1}{x}dx} dx] = C_1x + 2$$

$$y = \frac{1}{2}C_1x^2 + 2x + C_2, \quad y(0) = 0, \quad C_2 = 0$$

$$\text{又 } \int_0^1 (\frac{1}{2}C_1x^2 + 2x)dx = 2, \quad C_1 = 6, \quad y = 3x^2 + 2x$$

$$(2) \quad V = 2\pi \int_0^1 x(3x^2 + 2x)dx = \frac{17\pi}{6}$$

$$\text{或 } x = \frac{\sqrt{1+3y}-1}{3}$$

$$V = 5\pi - \pi \int_0^1 \frac{(\sqrt{1+3y}-1)^2}{9} dy = 5\pi - \frac{39\pi}{18} = \frac{17\pi}{6}$$

得分

九、(本题 5 分) 设 $f(x)$ 为 $[0, +\infty)$ 上单调减少的连续函数, 证明:

$$\int_0^x (x^2 - 3t^2)f(t)dt \geq 0$$

$$\text{证明: 设 } F(x) = \int_0^x (x^2 - 3t^2)f(t)dt,$$

$$F'(x) = 2x \int_0^x f(t)dt - 2x^2 f(x)$$

$$= 2x \int_0^x (f(t) - f(x))dt, \quad t \in [0, x]$$

$$f(x) \text{ 为 } [0, +\infty) \text{ 上单调减少的连续函数, } \Rightarrow f(t) \geq f(x) \Rightarrow F'(x) \geq 0$$

$$F(x) \text{ 在 } [0, +\infty) \text{ 上单调增加, 又 } F(0) = 0,$$

$$\text{所以 } \int_0^x (x^2 - 3t^2)f(t)dt \geq 0$$



《高等数学 A(上)》

评分标准

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

得分： 一、选择题 (每小题 4 分, 计 20 分)

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $x^2 \left(2 + x \sin \frac{1}{x} \right)$ 是 x^2 的 D

A. 高阶无穷小 B. 低阶无穷小 C. 等价无穷小 D. 同阶但不是等价无穷小

2. $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2}, & x > 0 \\ 2^x + a, & x < 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 连续, 则 $a =$ A

A. $-\frac{1}{2}$ B. 1 C. 0 D. -1

3. 已知 $f(x)$ 的导数在 $x = a$ 处连续, 且 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{x - a} = -1$, 则 C

A. $x = a$ 是 $f(x)$ 的极小值 B. $(a, f(a))$ 是曲线的拐点

C. $x = a$ 是 $f(x)$ 的极大值 D. $x = a$ 不是 $f(x)$ 的极值点, $(a, f(a))$ 也不是曲线的拐点

4. $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $F(x) = \int_a^x (x - t)f(t)dt$ 在 (a, b) 内 D

A. 必连续, 但不一定可导

B. 必可导, 但 $F'(x)$ 不一定连续

C. $F'(x)$ 连续, 但 $F'(x)$ 不一定可导 D. $F(x)$ 二阶可导



5. 函数 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续是函数在该点偏导数

$f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)$ 存在的 D 条件

A. 充分 B. 必要 C. 充要 D. 非充分非必要

得分

二、填空题 (每小题 4 分, 计 20 分)

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{x+1} = e$

2. 函数 $f(x) = \frac{(x+3)x+2}{x^2-4}$ 有跳跃间断点是 -2

3. 已知 $\int_0^x e^{t^2} dt + \int_0^{\sin x} \cos t dt = 0$, 则 $\frac{dy}{dx} = -e^{-x^2} \cos x \cos(\sin x)$

4. $f(x) = e^x + \frac{1}{e} \int_0^x f(x) dx$, 则 $f(x) = e^x + 1$

5. 设 $z = e^{\frac{x}{y}}$, 则 $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} e^{\frac{x}{y}}$

得分

三、计算下列极限 (每小题 6 分, 计 12 分)

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \int_0^x e^{t^2} dt}{x^2 \sin x}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \int_0^x e^{t^2} dt}{x^2 \sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \int_0^x e^{t^2} dt}{2x^3}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{x^2}}{6x^2}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^{x^2} \cdot 2x}{12x}$



$$= -\frac{1}{6}$$

.....6

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \ln \frac{\tan x}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \tan x - \ln x}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin x - \ln \cos x - \ln x}{x}} = e^1 = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln \tan x - \ln x}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin x - \ln \cos x - \ln x}{x}} \quad \text{.....3}$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{x \ln x} + \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{x} \right)}$$

.....4

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos 2x}{2x} \right)}$$

$$= e^0 = 1$$

.....6

得分

四、计算下列积分 (每小题 6 分, 计 12 分)

$$1. \int_0^3 \frac{x}{1 + \sqrt{1+x}} dx$$

根代法

$$\sqrt{1+x} = t, \quad dt = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} dx, \quad dx = 2t dt$$

$$\text{令 } \sqrt{1+x} = t, \text{ 则 } x = t^2 - 1, \quad dx = 2t dt$$

$$\int_0^3 \frac{x}{1 + \sqrt{1+x}} dx = 2 \int_1^2 \frac{t(t^2 - 1)}{1+t} dt$$

$$= 2 \int_1^2 (t^2 - t) dt = 2 \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} \right]_1^2 = \frac{5}{3}$$

$$\int_1^2 \frac{t^2-1}{1+t} \cdot 2t dt$$

$$= 2 \int_1^2 (t^2 - t) dt$$

$$= 2 \left[\frac{1}{3} t^3 - \frac{1}{2} t^2 \right]_1^2$$

$$= 2 \left[\frac{8}{3} - \frac{4}{2} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) \right] = \frac{5}{3}$$

$$2. \int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx$$

$$\int \frac{e^x}{1+e^x} de^x$$

$$\int \frac{t}{1+t} dt$$

$$\int \frac{t-1+1}{1+t} dt$$

$$\int dt - \int \frac{1}{1+t} dt$$

$$\int \frac{e^x de^x}{1+e^x}$$

$$t = \ln(t+1)$$

$$e^x \ln(e^x + 1) + C$$

.....2



$$= \int \frac{(e^x + 1) - 1}{e^x + 1} de^x \quad \dots\dots 4$$

$$= e^x - \ln(e^x + 1) + C \quad \dots\dots 6$$

得分

五、计算题 (本题 6 分)

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2x, & 1 < x \leq 2 \end{cases} \quad \text{求 } F(x) = \int_0^x f(t)dt \text{ 的表达式}$$

$\int_0^1 e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^1 = -e^{-1} + 1$

解: 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x e^{-t} dt = 1 - e^{-x}$; 3

当 $1 < x \leq 2$ 时, $F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^1 e^{-t} dt + \int_1^x 2t dt = x^2 - e^{-1}$ 6

得分

六、证明题 (本题 8 分)

证明: 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内存在 ξ , 使得 $\cos \xi = \xi \sin \xi$

证明: 选取 $F(x) = x \cos x$; 4

且 $F(0) = F(\frac{\pi}{2}) = 0$, 在此区间内运用罗尔定理可得.

得分

七、证明题 (本题 8 分)

证明: 当 $x \in (0, 1)$ 时, $(1-x)e^{2x} < 1+x$

证明: 令 $f(x) = (1-x)e^{2x} - (1+x)$

$$\text{则 } f'(x) = -e^{2x} + 2(1-x)e^{2x} - 1 = (1-2x)e^{2x} - 1 \quad \dots\dots 2$$

$$f''(x) = -2e^{2x} + 2(1-2x)e^{2x} = -4xe^{2x} < 0 \quad \dots\dots 4$$

$x \in (0, 1)$ 时, $f''(x) < 0$, $\therefore f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 内单调下降 6

$\therefore f'(x) < f'(0) = 0 \quad \therefore f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内单调下降



又 $f(0)=0 \quad x \in (0,1), f(x) < f(0)=0$

即 当 $x \in (0,1)$ 时, $(1-x)e^{2x} < 1+x$ 8

得分

八、计算题 (本题 6 分)

实验得知, 弹簧在拉伸过程中, 拉力与弹簧的伸长量成正比, 已知弹簧的自然长度为 $0.6m$, $10N$ 的力使它伸长到 $1m$, 问使弹簧从 $0.9m$ 伸到 $1.1m$ 时需要做多少功?

解: 由 $F=kx$, 得 $k = \frac{F}{x} = \frac{10N}{0.4m} = 25N/m$ 2 $k = \frac{10}{0.4} = 25$

而 $dW = Fdx = kxdx$ 3

$W = \int_{0.9}^{1.1} kxdx = \frac{1}{2} kx^2 \Big|_{0.9}^{1.1} = 2(J)$ 6

$dW = Fdx$
 $= 25x dx$
 $\int_{0.9}^{1.1} 25x dx$

得分

九、计算题 (本题 8 分)

问 k 为何值时, 由曲线 $y = x^2$ 及直线 $y = kx (0 < k < 2)$ 及 $x = 2$ 所围的图形的面积最小

解: 面积 $A = \int_0^k (kx - x^2) dx + \int_k^2 (x^2 - kx) dx$ 3



$= \frac{1}{3} k^3 - 2k + \frac{8}{3}$ 5

令 $A' = k^2 - 2 = 0 \Rightarrow k = \sqrt{2}$ 6

$A'' = 2k \quad (0 < k < 2)$

所以图形在 $k = \sqrt{2}$ 时面积最小8

$A = \frac{1}{3} k^3 - 2k + \frac{8}{3}$
 $A' = k^2 - 2 = 0 \Rightarrow k = \sqrt{2}$
 $A'' = 2k = 2\sqrt{2} > 0$
 $A = \frac{1}{3} (\sqrt{2})^3 - 2\sqrt{2} + \frac{8}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3} - 2\sqrt{2} + \frac{8}{3} = \frac{8 - 4\sqrt{2}}{3}$



《高等数学 A(上)》

答案

院(系) _____ 班级 _____ 学号 _____ 姓名 _____

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

得分

一、选择题 (本大题分 5 小题, 每题 3 分, 共 15 分)

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列无穷小量关于 x^2 等价的是 (D)

(A) $x^3 \ln(1+x)$ (B) $1 - \cos 3x$

(C) $(e^x - 1) \sin x^2$ (D) $\sqrt{1+2x^2} - 1$

2. 设 $f(x) = \frac{\sin x}{(x)(x^2-1)}$, 则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的 (B)

(A) 可去间断点 (B) 跳跃间断点 (C) 振荡间断点 (D) 无穷间断点

3. 已知 $f'(3) = 2$, 则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-h) - f(3)}{2h} =$ (C)

(A) 1 (B) -2 (C) -1 (D) 0

4. 方程 $x^2 = x \sin x + \cos x$ 的实数根的个数为 (B)

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

5. 函数 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 点的偏导数 $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ 连续是函数 $f(x, y)$ 在该点可微的 (A) 条件

(A) 充分 (B) 非充分非必要 (C) 充要 (D) 必要

得分

二、填空题 (本大题分 5 小题, 每题 3 分, 共 15 分)

1. 曲线 $y = xe^x$ 的拐点坐标为 $(-2, -2e^{-2})$.

2. 曲线 $\begin{cases} x = e^t \sin 2t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程为 $y = \frac{1}{2}x + 1$.

《高等数学 A(上)》试卷 A 第 1 页 共 5 页

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^t \sin 2t + 2e^t \cos 2t}{e^t \cos t - e^t \sin t} = \frac{\sin 2t + 2 \cos 2t}{\cos t - \sin t}$$

$$x=0, y=1$$

$$e^t \sin 2t = 0$$

$$e^t \cos t = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{1} = 2$$



扫描全能王 创建

$$f(b) = \frac{1 + \sqrt{b^2 + 1}}{b + \sqrt{b^2 + 1}}$$

2. 设 $\int f(x) dx = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + C$, 则 $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{(x^2 + 1)^3}}$.

$$\ln x^2$$

4. $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx = \underline{\quad 1 \quad}$.

$$\int \frac{1}{x \ln^2 x} dx$$

5. 设 $z = x^y (x > 0)$, 则 $dz|_{(2,-1)} = -\frac{1}{4} dx + \frac{\ln 2}{2} dy$.

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

得分

三、计算下列极限 (每题 7 分, 共 14 分)

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-4}{3x+2} \right)^{\frac{x+1}{2}}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x \ln(1+x)}$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+3}{3x+2}} = e^{-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2}$$

得分

四、计算下列积分 (每题 7 分, 共 14 分)

1. $\int \cos(\ln x) dx$

2. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$$= \frac{1}{2} [x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x)] + C$$

$$x = \sin t, \int \sin^2 t dt$$

$$\int \cos(\ln x) dx$$

$$= \int \frac{1 - \cos 2t}{2} dt$$

$$x \cos(\ln x) - \int x d \cos(\ln x)$$

$$= \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

$$x \cos(\ln x) + \int x \sin(\ln x) dx$$

$$x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx$$

$$2 \int \cos(\ln x) dx = x (\cos(\ln x) + \sin(\ln x))$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$



得分

五、(本题 8 分) 设 $f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ \cos x & x \geq 0 \end{cases}$, 求

$F(x) = \int_{-1}^x f(t)dt$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 的表达式.

$$x \leq 0, \quad F(x) = \int_{-1}^x t dt = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

$$x > 0, \quad F(x) = \int_{-1}^0 t dt + \int_0^x \cos t dt = \sin x - \frac{1}{2}$$

得分

六、(本题 8 分) 一水平横放的半径为 R 的圆桶, 内盛液体桶密度为 ρ 的液体, 求桶的一个端面所受的侧压力 (答案中保留 ρ, g).

$$dF = 2\rho g x \sqrt{R^2 - x^2} dx$$

$$F = \int_0^R 2\rho g x \sqrt{R^2 - x^2} dx = \frac{2}{3} \rho g R^3$$



得分

七、(本题 8 分) 设 $z = f(x^2 + y^2) + g(x, \frac{x}{y})$, 其中函数 $f(t)$ 二

阶可导, $g(u, v)$ 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xf'(x^2 + y^2) + g'_1(x, \frac{x}{y}) + \frac{1}{y}g'_2(x, \frac{x}{y})$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

$$= 4xyf''(x^2 + y^2) - \frac{1}{y^2}g''_{12}(x, \frac{x}{y}) + (-\frac{1}{y^2})g'_1(x, \frac{x}{y}) + \frac{1}{y}(-\frac{1}{y^2})g''_{22}(x, \frac{x}{y})$$

$$= 4xyf''(x^2 + y^2) - \frac{1}{y^2}g''_{12}(x, \frac{x}{y}) - \frac{1}{y^2}g'_1(x, \frac{x}{y}) - \frac{1}{y^3}g''_{22}(x, \frac{x}{y})$$

65



得分	
----	--

八、(本题8分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续, 在开区间 $(0,1)$ 内可

导, 且满足 $f(0) = 2 \int_0^1 e^{-x} f(x) dx$, 证明: 至少存在一点 $\xi \in (0,1)$, 使

$$\text{得 } f'(\xi) = f(\xi). \quad f(0) - f(1) = 0 = \frac{f(1)}{e^1} - \frac{f(0)}{e^0} = \frac{f(1)e^1 - f(0)}{e^1 - e^0} = 0$$

解: 令 $F(x) = e^{-x} f(x)$, $F(0) = f(0) = 2 \int_0^1 e^{-x} f(x) dx = 2 \int_0^1 F(x) dx$

根据积分中值定理: 存在 $\xi_1 \in (0,1)$, 使得 $F(0) = 2F(\xi_1)(1 - \frac{1}{2}) = F(\xi_1)$

$F(x)$ 在 $(0, \xi_1) \subset (0,1)$ 上满足罗尔定理的条件, 存在 $\xi \in (0, \xi_1) \subset (0,1)$, 使得

$$F'(\xi) = 0, \text{ 即: } e^{-\xi}(f'(\xi) - f(\xi)) = 0, \text{ 即 } f'(\xi) = f(\xi)$$

得分	
----	--

九、(本题5分) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导, 且 $f''(x) > 0$, 证明:

$$\int_a^b f(x) dx < (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2} \quad F(a) = \int_a^t f(x) dx \sim \frac{f(a)+f(t)}{2}(t-a)$$

解: 令 $F(t) = (t-a) \frac{f(a) + f(t)}{2} - \int_a^t f(x) dx$, $F(a) = 0$, $F'(t) = 0$

$$F'(t) = \frac{f(a) - f(t)}{2} + (t-a) \frac{f'(t)}{2}, \text{ 前式利用中值定理, 存在 } \xi \in (a,t)$$

$$= (a-t) \frac{f'(\xi)}{2} + (t-a) \frac{f'(t)}{2} = \frac{1}{2}(t-a)(f'(\xi) - f'(t)) > 0$$

$\therefore f''(x) > 0 \Rightarrow f'(x)$ 单调递增

又 $F(t)$ 在 $t \geq a$ 连续, 则 $F(t)$ 在 $t \geq a$ 单调递增, 当 $t > a$, $F(t) > F(a)$

$$\text{特别 } F(b) > F(a), \text{ 即 } \int_a^b f(x) dx < (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

得分	
----	--

十、(本题5分) 由 $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$ 所围成的曲边梯形, 被

直线 $x = t$ ($t \in (1,2)$) 分成 A, B 两部分, 将 A, B 分别绕直线 $x = t$ 旋转所

成的旋转体的体积分别记为 V_A, V_B , 求使 $V_A + V_B$ 取得最小值的 t 的值.



(高等数学A(上)) 试卷A 第4页共5页



解: $V_A = 2\pi \int_1^2 (2-x) \frac{1}{x^2} dx = 2\pi(-1 - \ln 2 + 1)$

$$V_B = 2\pi \int_2^4 (x-2) \frac{1}{x^2} dx = 2\pi(\ln 2 - 1 + \frac{1}{2} - \ln 2)$$

$$V'(t) = V_A + V_B = -4\pi \ln 2 + 3\pi + 2\pi \ln 2 - 4\pi, \quad t \in (1, 2)$$

令 $V'(t) = -\frac{4\pi}{t} + 3\pi = 0$, 得 $t = \frac{4}{3}$ (唯一驻点), $V''(\frac{4}{3}) > 0$,

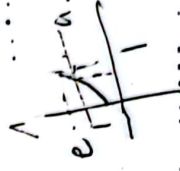
$V'(t) = V_A + V_B$ 在 $t = \frac{4}{3}$ 处取得极小值即为最小值.

十、(本题 5 分) 设曲线 $y = e^x$ ($0 \leq x \leq 1$) 与直线 $y = a$ ($1 < a \leq e$), 它们与 y 轴

围成的面积为 A_1 , 与 $x = 1$ 所围面积为 A_2 , 问 a 为何值时, 面积 $A = A_1 + A_2$ 最小?

(本题 5 分)

解: 设 $y = a$ 与曲线 $y = e^x$ 的交点为 (x_0, y_0) , 则 $y_0 = a = e^{x_0}$.



$$A_1 = \int_0^{x_0} (e^x - e^{x_0}) dx = x_0 e^{x_0} - \int_0^{x_0} e^x dx$$

$$A_2 = \int_{x_0}^1 (e^x - e^{x_0}) dx = \int_{x_0}^1 e^x dx - (1 - x_0) e^{x_0}$$

$$A(x) = A_1 + A_2 = x e^{x_0} - \int_0^{x_0} e^x dx + \int_{x_0}^1 e^x dx - (1 - x_0) e^{x_0}$$

$$A'(x) = e^{x_0} + 2x^2 e^{x_0} - e^{x_0} - e^{x_0} - 2x(1 - x_0) e^{x_0} = 2x(2x - 1) e^{x_0}$$

$x = \frac{1}{2}$ (唯一驻点) 且为极小值即为最小值, 故当 $a = e^{\frac{1}{2}}$ 时, 面积最小.



《高等数学 A》

(系) _____ 班级 _____ 学号 _____ 姓名 _____

号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
分											

一、选择题 (本大题分 5 小题, 每题 3 分, 共 15 分)

1、当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列无穷小量关于 x^2 等价的是 (D)

(A) $x^3 \ln(1+x)$ (B) $1 - \cos 3x$

(C) $(e^x - 1) \sin x^2$ (D) $\sqrt{1+2x^2} - 1$

2、设 $f(x) = \frac{\sin x}{|x|(x^2 - 1)}$, 则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的 (B)

(A) 可去间断点 (B) 跳跃间断点 (C) 振荡间断点 (D) 无穷间断点

3、已知 $f'(3) = 2$, 则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-h) - f(3)}{2h} =$ (C)

(A) 1 (B) -2 (C) -1 (D) 0

4、方程 $x^2 = x \sin x + \cos x$ 的实数根的个数为 (B)

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

5、微分方程 $y'' + y' = 2 \sin x$ 的特解 y^* 的形式为 (D)

(A) $e^x (a \cos x + b \sin x)$ (B) $x(a \cos x + b \sin x)$

(C) $a \sin x$ (D) $a \cos x + b \sin x$

二、填空题 (本大题分 5 小题, 每题 3 分, 共 15 分)

1、曲线 $y = xe^x$ 的拐点坐标为 $(-2, -2e^{-2})$.

2、曲线 $\begin{cases} x = e^t \sin 2t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程为 $y = \frac{1}{2}x + 1$.



3、设 $\int f(x)dx = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + C$ ，则 $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{(x^2 + 1)^3}}$

4、 $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx = \frac{1}{1}$

5、微分方程 $y' - \frac{1}{x}y = xe^x$ 的通解为 $y = x(e^x + C)$ 。

三、计算下列极限 (每题 6 分, 共 12 分)

得分

1、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x - 4}{3x + 2} \right)^{\frac{x+1}{2}}$

2、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x \ln(1+x)}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+3}{3x+2} = e^{-1}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2}$

四、计算下列各题 (每题 6 分, 共 18 分)

得分

1、 $\int \cos(\ln x) dx$

2、 $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$= \frac{1}{2} [x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x)] + C$

$x = \sin t \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt$

$= \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$

3、设 $y = y(x)$ 由方程 $xy + 2 \ln x = y$ 确定, 求曲线 $y = y(x)$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线方程,

并求 $y = y(x)$ 在 $x = 1, y = 1$ 处的二阶导数。

解: 两边对 x 求导: $y + xy' + \frac{2}{x} = y' \cdot y'$, 将 $x=1, y=1$ 代入得 $y' = 1$

切线方程: $y = x$

两边再对 x 求导: $y' + y' + xy'' = \frac{2}{x^2} = 12y^2(y'^2 + 4y^3 \cdot y'')$



得分

八、(本题8分) 设 $f(x)$ 为连续函数, 且满足

$$f(x) = e^x - x \int_0^x f(t) dt + \int_0^x t f(t) dt, \text{ 求 } f(x).$$

解: $f'(x) = e^x - \int_0^x f(t) dt + x f(x) + x f(x) = e^x - \int_0^x f(t) dt$

$f''(x) = e^x - f(x)$ 即 $f''(x) + f(x) = e^x$, 且 $f(0) = 1, f'(0) = 1$.

对应的奇次方程的通解: $Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

特解形式: $y = A e^x$, 代入解得 $A = \frac{1}{2}$

通解: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2} e^x$

将 $f(0) = 1, f'(0) = 1$ 代入上式: $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$

$$f(x) = \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} e^x$$

得分

九、(本题6分) 由 $y = \frac{1}{x^2}, y = 0, x = 1, x = 2$ 所围成的曲边梯形,

被直线 $x = t (t \in (1, 2))$ 分成 A, B 两部分, 将 A, B 分别绕直线 $x = t$ 旋转

所成的旋转体的体积分别记为 V_A, V_B , 求使 $V_A + V_B$ 取得最小值的 t 的值

解: $V_A = 2\pi \int_1^t (t-x) \frac{1}{x^2} dx = 2\pi(-1 - \ln t + t)$

$$V_B = 2\pi \int_t^2 (x-t) \frac{1}{x^2} dx = 2\pi(\ln 2 - 1 + \frac{t}{2} - \ln t)$$

$$V(t) = V_A + V_B = -4\pi \ln t + 3\pi t + 2\pi \ln 2 - 4\pi, t \in (1, 2)$$

令 $V'(t) = -\frac{4\pi}{t} + 3\pi = 0$, 得 $t = \frac{4}{3}$ (唯一驻点), $V''(\frac{4}{3}) > 0$

$V(t) = V_A + V_B$ 在 $t = \frac{4}{3}$ 处取得极小值即为最小值.

(十) (本题5分) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导, 且 $f''(x) > 0$, 证明:

$$\int_a^b f(x) dx < (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

得分

71



将 $x=1, y=1, y'=1$ 代入得: $y'' \Big|_{\substack{x=1 \\ y=1}} = -4$

得分

五、(本题 7 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续, 在开区间 $(0,1)$ 内可导,

且满足 $f(0) = 2 \int_0^1 e^{-x} f(x) dx$, 证明: 至少存在一点 $\xi \in (0,1)$, 使得

$$f'(\xi) = f(\xi) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(1) = f(0) = 2 \int_0^1 g(x) dx \\ \frac{f(1) - f(0)}{1-0} = \frac{2 \int_0^1 g(x) dx - \int_0^1 f(x) dx}{1-0} \end{array} \right.$$

证明: 令 $F(x) = e^{-x} f(x)$, $F(0) = f(0) = 2 \int_0^1 e^{-x} f(x) dx = 2 \int_0^1 F(x) dx$ $\frac{\partial g}{\partial x} = 0$

根据积分中值定理: 存在 $\xi_1 \in [\frac{1}{2}, 1]$, 使得 $F(0) = 2F(\xi_1)(1 - \frac{1}{2}) = F(\xi_1)$

$F(x)$ 在 $(0, \xi_1) \subset (0,1)$ 上满足罗尔定理的条件, 存在 $\xi \in (0, \xi_1) \subset (0,1)$, 使得

$F'(\xi) = 0$, 即: $e^{-\xi}(f'(\xi) - f(\xi)) = 0$, 即 $f'(\xi) = f(\xi)$

得分

六、(本题 7 分) 设一圆锥形贮水池, 深 10, 上口直径 20, 盛满水,

今要将池中水全部吸出, 问要作多少功? (答案中保留 ρ, g, π)

解: $w = \int_0^{10} \rho g \pi (10-x)^2 dx = \frac{2500}{3} \rho g \pi$

得分

七、(本题 7 分) 求微分方程 $(1+x^2)y'' = 2xy'$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 1$,

$y|_{x=0} = 3$ 的特解.

解: $y' = p(x), y'' = p' \Rightarrow (1+x^2)p' = 2xp \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{2x dx}{1+x^2}$

$\ln|p| = \ln(1+x^2) + \ln|C_1|, \quad p = C_1(1+x^2) \quad \text{由 } y'|_{x=0} = 3, \text{ 得 } C_1 = 3$

于是 $y' = 3(1+x^2) \therefore y = x^3 + 3x + C_2$, 由 $y|_{x=0} = 1$, 得 $C_2 = 1$.
故 $y = x^3 + 3x + 1$

自觉遵守考场规则, 诚信考试, 绝不作弊



解: 令 $F(t) = (t-a) \frac{f(a)+f(t)}{2} - \int_a^t f(x)dx$, $F(a)=0$

$$F'(t) = \frac{f(a)-f(t)}{2} + (t-a) \frac{f'(t)}{2}, \text{ 前式利用中值定理, 存在 } \xi \in (a, t)$$

$$= (a-t) \frac{f'(\xi)}{2} + (t-a) \frac{f'(t)}{2} = \frac{1}{2}(t-a)[f'(t) - f'(\xi)] > 0$$

($\because f''(x) > 0, \Rightarrow f'(x)$ 单调递增)

又 $F(t)$ 在 $t \geq a$ 连续, 则 $F(t)$ 在 $t \geq a$ 单调递增, 当 $t > a$, $F(t) > F(a)$

特别 $F(b) > F(a)$, 即 $\int_a^b f(x)dx < (b-a) \frac{f(a)+f(b)}{2}$



《高等数学 A(上)》

院(系) _____ 班级 _____ 学号 _____ 姓名 _____

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

一、选择题 (本大题分 5 小题, 每题 4 分, 共 20 分)

得分

1、当 $x \rightarrow 0$ 时, $\frac{1}{4}(\cos 3x - \cos x)$ 是 x^2 的 (A)

- (A) 同阶但不等价无穷小 (B) 等价无穷小
(C) 高阶无穷小 (D) 低阶无穷小

2、设 $f(x) = \frac{\sin(x-1)}{|x-1|}$, 则 $x=1$ 是 $f(x)$ 的 (B)

- (A) 可去间断点 (B) 跳跃间断点 (C) 振荡间断点 (D) 无穷间断点

3、已知 $f(x) = \begin{cases} ae^x & x < 0 \\ b + \ln(1+x) & x \geq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导, 则 (B)

(A) $a=-1, b=-1$ (B) $a=1, b=1$

(C) $a=2, b=2$ (D) $a=2, b=1$

4、设 e^{-x} 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $\int xf(x)dx =$ (C)

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

5、函数 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 点的偏导数 $f_x(x, y), f_y(x, y)$ 存在是函数

$f(x, y)$ 在该点连续的 _____ 条件 (D)

- (A) 充分 (B) 必要 (C) 充要 (D) 非充分非必要



得分	
----	--

二、填空题 (本大题分 5 小题, 每题 4 分, 共 20 分)

1. 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x+1} \right)^x = e^2$, 则 $a = 2$.

2. 设 $y = (\cos 2x)$, 则 $y^{(10)} \left(\frac{\pi}{2} \right) = 2^{10}$

3. 函数 $F(x) = \int_0^{x^2-x} e^t dt$ 的单调区间为, 则 $\left(\frac{1}{2}, +\infty \right)$.

4. 设 $f(x) = x + 2 \int_0^1 f(t) dt$, 则 $f(x) = x - 1$

5. 设 $z = e^{-x} \sin \frac{x}{y}$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} \bigg|_{(2, \frac{1}{2})} = \frac{\pi}{e^2}$.

得分	
----	--

三、计算下列极限 (每题 6 分, 共 12 分)

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$

解: $\frac{n}{\sqrt{n+n^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

根据夹逼定理, 原式=1

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{3 - \ln(1+3x)}{x} - \frac{\ln(1+3x)}{x \sin x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x - \ln(1+3x)}{x^2}$

$\frac{3 \cos x - \frac{3}{1+3x}}{2x} = \frac{3}{2x} \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\sin x + \frac{3}{(1+3x)^2} \right) = \frac{9}{2}$

得分	
----	--

四、计算 (每题 6 分, 共 12 分)

1. 设 $\begin{cases} x = f'(t) \\ y = f''(t) - f(t) \end{cases}$ 其中 $f(t)$ 具有一阶导数且

$f''(t) \neq 0$, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$



《高等数学 A(上)》

院(系) _____ 班级 _____ 学号 _____ 姓名 _____

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

一、选择题 (共 20 分, 每题 4 分)

得分	
----	--

1. 若 $x \rightarrow 0$, $f(x)$ 为无穷小量, 且 $f(x)$ 是 x^2 的高阶无穷小,

则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sin^2 x} = \underline{\quad B \quad}$

- A. 1 B. 0 C. $\frac{1}{2}$ D. ∞

2. 设 $f(x)$ 对任意 x 满足 $f(x+1) = af(x)$ (a 为常数), 且 $f'(0) = b$, 则必有 C

- A. $f'(1)$ 不存在 B. $f'(1) = a$ C. $f'(1) = ab$ D. $f'(1) = b$

3. 曲线 $y = x \arctan x$ 的图形 B

- A. 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是凸的 B. 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是凹的

- C. 在 $(-\infty, 0)$ 内是凸的, 在 $(0, +\infty)$ 内是凹的

- D. 在 $(-\infty, 0)$ 内是凹的, 在 $(0, +\infty)$ 内是凸的

4. 若 $\int f(x) dx = x^2 + c$, 则 $\int x f(1-x^2) dx = \underline{\quad D \quad}$

- A. $2(1-x^2) + c$ B. $-2(1-x^2) + c$

- C. $\frac{1}{2}(1-x^2)^2 + c$ D. $-\frac{1}{2}(1-x^2)^2 + c$



5. 函数 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 点可微是函数在该点偏导数 $f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)$

存在的 A 条件

A. 充分 B. 必要 C. 充要 D. 非充分非必要

二、填空题 (共20分, 每题4分)

得分	
----	--

1. $\lim_{x \rightarrow 0} (x \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \sin x) = 0$

2. 函数 $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{|x|(x^2 - 4)}$ 的一个跳跃间断点是 $x = 0$

3. 设 $x = \int_0^t e^u \cos u du, y = \int_0^t e^u \sin u du$, 则 $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{\cos t} = \tan t$

4. 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ x, & x > 1 \end{cases}$, 则 $\int_0^2 f(x) dx = \frac{5}{2}$

5. 设函数 $z = z(x, y) = \ln \frac{2x}{y}$, 则 $dz|_{(1, 2)} = d(x - \frac{1}{2}dy)$

三、计算下列极限 (共12分, 每题6分)

得分	
----	--

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^{x+1} - (x+3)^{x+3}}{x^{2x+4}}$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x} \right)^{x+1} \left(\frac{x+3}{x} \right)^{x+3} = e^4$

$\therefore \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x} \right)^{x+1} = e, \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+3}{x} \right)^{x+3} = e$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+3}{x} \right)^{x+3} = e$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{1}{4}} \frac{\arctan \frac{1}{x+1}}{x+1}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^{\frac{5}{4}}}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{\frac{5}{4} x^{\frac{1}{4}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{\frac{1}{4}} (1+x^2)} = \frac{1}{2}$



四 计算下列积分 (共 12 分, 每题 6 分)

$$1. \int \frac{x}{x-\sqrt{x^2-1}} dx = \int \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x^2-(x^2-1)} dx = \int \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{1} dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}(x^2-1)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$\int_0^1 e^{-x} \sin x dx$$

$$x = e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \cos x dx$$

$$= -e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x + \int e^{-x} \sin x dx$$

$$\text{原式} = -\frac{e^{-x}}{2} (\sin x + \cos x) \Big|_0^1 = -\frac{e^{-1}}{2} (1) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (1 - e^{-1})$$

五 (本题 6 分)

设曲线的方程为 $x^3 + y^3 + (x+1)\cos(\pi y) + 9 = 0$, 求此曲线在 $x = -1$ 处的法线方程.

$$3x^2 + 3y^2 y' + \cos(\pi y) + (x+1)(-\sin \pi y)(\pi y') = 0$$

$$\text{将 } x = -1 \text{ 代入原方程, } y(-1) = -2$$

$$3 + 12y' + 1 = 0 \quad y' = -\frac{4}{3}$$

$$\text{法线方程: } y + 2 = \frac{3}{4}(x + 1)$$

$$3x - y + 1 = 0$$

六 (本题 8 分)

设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) < 0, f(1) > 1$.

证明: (1) 方程 $f(x) = x$ 在 $(0, 1)$ 内至少有一实根 (2) 存在 $\xi \in (0, 1)$ 使 $f'(\xi) > 1$

$$(1) \text{ 令 } F(x) = f(x) - x$$

$$F(0) = f(0) < 0$$

$$F(1) = f(1) - 1 > 0$$

根据介值定理, $F(x)$ 在 $(0, 1)$ 内至少有一实根.

$$(2) \text{ 由拉格朗日中值定理, } \exists \xi \in (0, 1) \text{ 使 } f'(\xi) > 1$$

即 $f(x) = x$ 在 $(0, 1)$ 内至少有一实根.



分

七 (本题8分) 证明不等式: $x + \frac{x^2}{2} > (1+x)\ln(1+x) \quad (x > 0)$

$F(x) = x + \frac{x^2}{2} - (1+x)\ln(1+x) \quad F(0) = 0$

$F'(x) = 1 + x - \ln(1+x) - \frac{1+x}{1+x} = x - \ln(1+x) \quad F'(0) = 0$

$F''(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} > 0 \quad (x > 0) \quad \therefore F'(x) \uparrow$

$F'(x) > F'(0) = 0 \quad (x > 0) \quad \therefore F(x) \uparrow$

$F(x) > F(0) = 0.$

得分

八 (本题8分)

一个弹簧压缩 x cm, 产生 $4x$ kg 的力, 求将它从自然长度压缩 5 cm,

需做多少焦耳的功? (1 kg = 9.8 N, 1 牛顿·米 = 1 焦耳)

$$W = \int_0^5 F dx$$

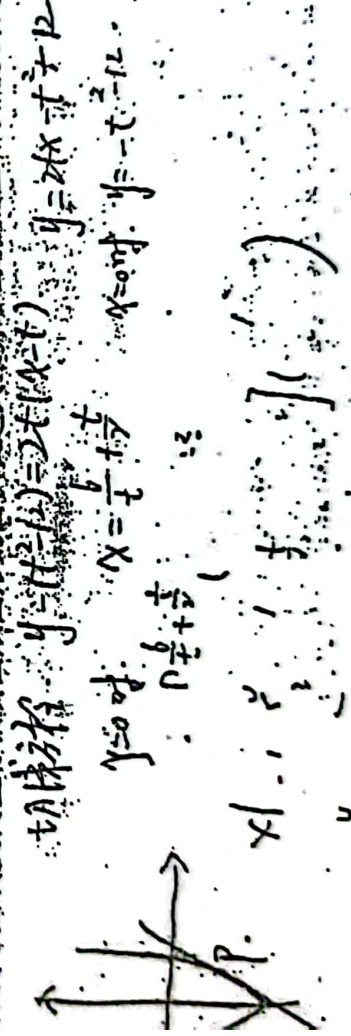
$$= \int_0^5 4x dx$$

$$= 2x^2 \Big|_0^5 = 50 \text{ kg} \cdot \text{cm} = 50 \times 9.8 \times 0.01 = 4.9 \text{ J}$$

得分

九 (本题6分)

在曲线 $y = x^2 - 12$ 上有点 $P(t, t^2 - 12) (0 < t < 2\sqrt{3})$, 写出以该点为切点的切线与两坐标轴所围成图形的面积表达式, 并求出 t 为何值时该面积最小



$$= \frac{1}{2} \left(\frac{t}{2} + \frac{t^2}{2} \right) (-t^2 + 12) = \frac{1}{2} \left(\frac{t}{2} + \frac{t^2}{2} \right) (-t^2 + 12)$$

$$A' = \frac{1}{2} \left(-\frac{t}{2} + t \right) (-t^2 + 12) = \frac{1}{2} \left(\frac{t}{2} + \frac{t^2}{2} \right) (-t^2 + 12)$$

$$\therefore A' = 0 \quad t = 2 \text{ 满足要求} \quad \therefore A = 32 - 16\sqrt{3}$$