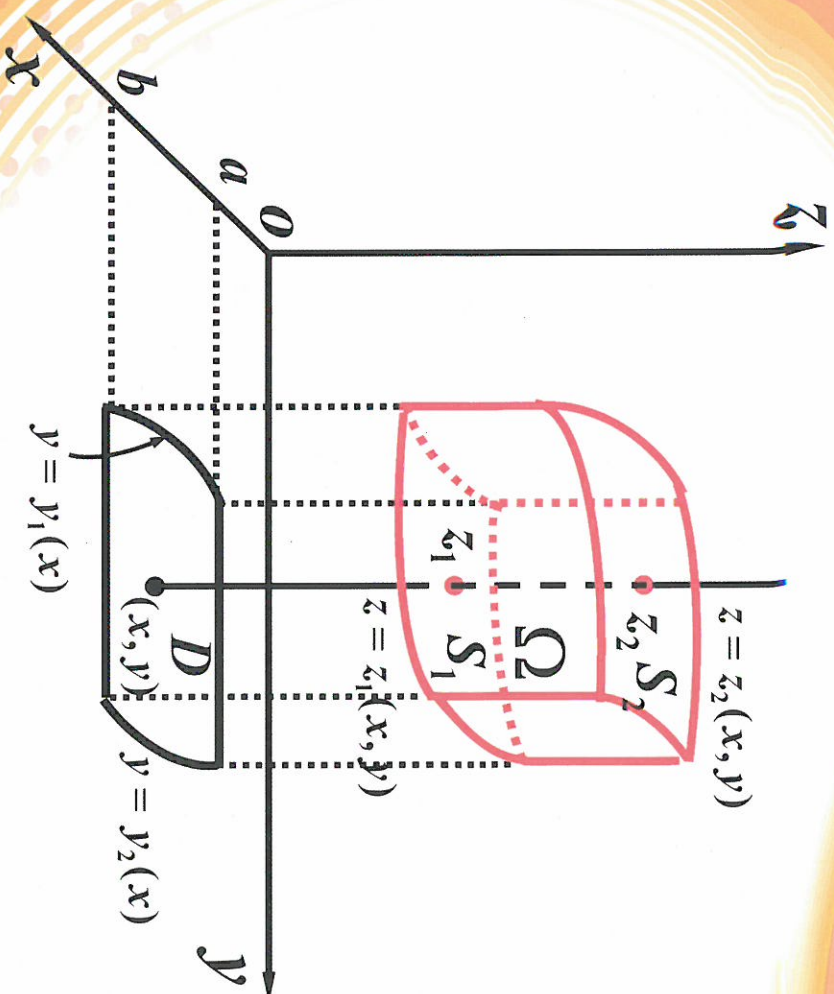
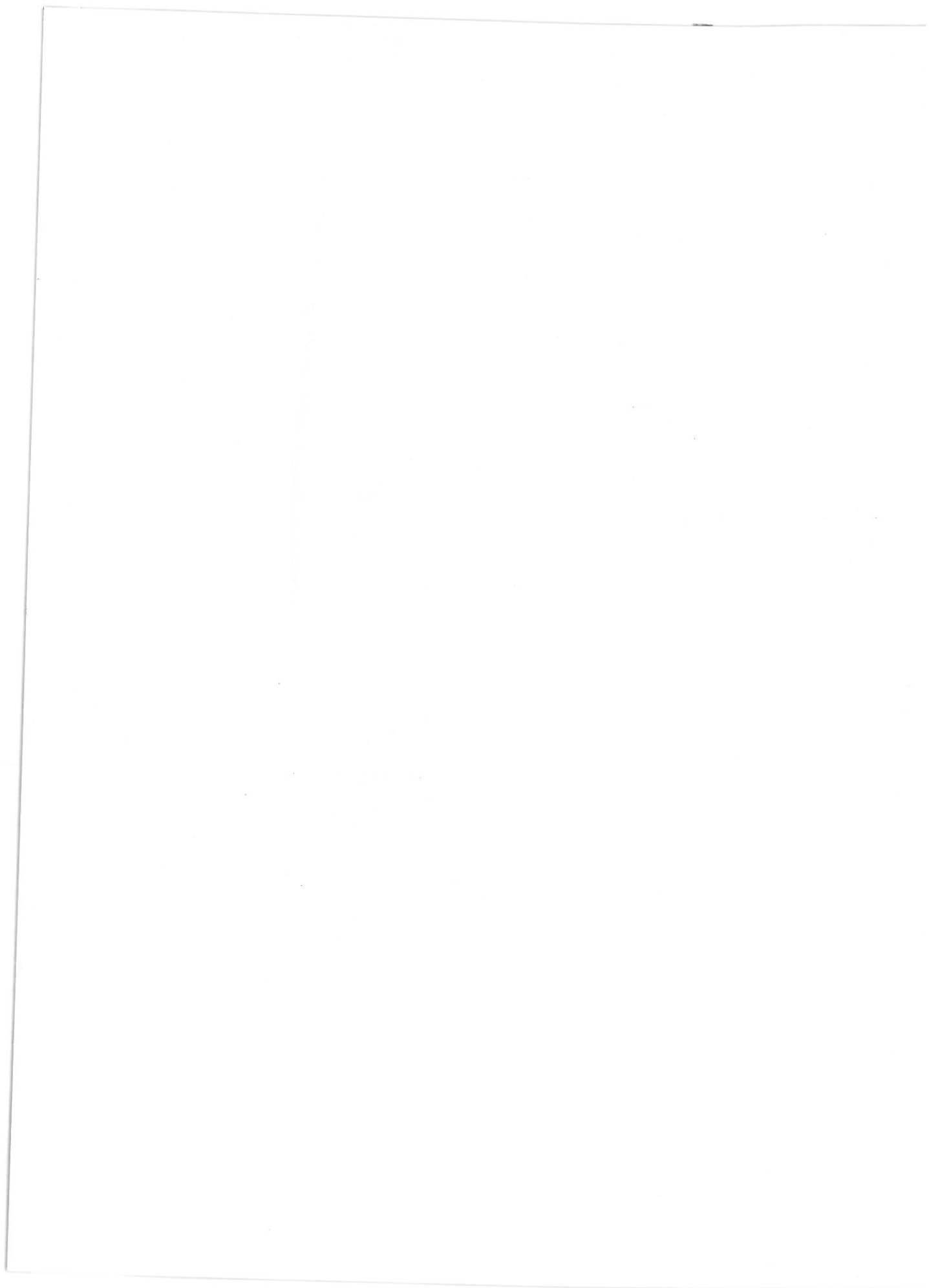


高等数学

同步练习册

上册





目 录

第1章 极限与连续	1	第5章 定积分及其应用	39
1.1 函数.....	1	4.2.1 第一类换元法.....	32
1.2 数列的极限.....	2	4.2.2 第二类换元法.....	33
1.3 函数的极限.....	2	4.3 分部积分法.....	34
1.4 无穷小量与无穷大量.....	3	4.4 有理函数和可化为有理函数的积分.....	35
1.5 极限运算法则.....	3	4.5 总习题.....	36
1.6 极限存在准则 两个重要极限.....	5	第5章 定积分及其应用	39
1.7 无穷小的比较.....	6	5.1 定积分的概念.....	39
1.8 函数的连续性与间断点.....	7	5.2 定积分的性质.....	39
1.9 闭区间上连续函数性质.....	8	5.3 微积分基本定理.....	40
1.10 总习题.....	9	5.4 定积分的换元法与分部积分法.....	42
第2章 导数与微分	13	5.4.1 定积分的换元积分法.....	42
2.1 导数的定义.....	13	5.4.2 定积分的分部积分法.....	43
2.2 求导法则.....	14	5.5 广义积分.....	44
2.3 高阶导数及相关变化率.....	16	5.6 定积分的几何应用.....	45
2.4 微分.....	17	5.7 定积分的物理应用.....	46
2.5 总习题.....	18	5.8 总习题.....	47
第3章 微分中值定理与导数的应用	21	第6章 常微分方程	51
3.1 微分中值定理.....	21	6.1 微分方程的基本概念.....	51
3.2 洛必达法则.....	22	6.2 一阶微分方程.....	51
3.3 泰勒公式.....	23	6.2.1 可分离变量的微分方程.....	51
3.4 函数的单调性和极值.....	24	6.2.2 一阶线性微分方程.....	52
3.5 函数图形的描绘.....	26	6.2.3 几类可降阶的高阶微分方程.....	53
3.6 总习题.....	27	6.3 高阶线性微分方程.....	54
第4章 不定积分	31	6.3.1 高阶线性微分方程解的结构.....	54
4.1 不定积分的概念与性质.....	31	6.3.2 常系数线性微分方程.....	54
4.2 换元积分法.....	32	6.3.3 欧拉方程.....	56
		6.4 总习题.....	57

目 录

2020/2021 学年第一学期.....	61
《高等数学 A(I) 上》期中试卷.....	61
2021/2022 学年第一学期.....	64
《高等数学 A(I) 上》阶段测试 A 卷.....	64
2021/2022 学年第一学期.....	65
《高等数学 A(I) 上》阶段测试 B 卷.....	65
2021/2022 学年第一学期.....	67
《高等数学 A(I) 上》阶段测试 C 卷.....	67
2020/2021 学年第一学期.....	69
《高等数学 A(I) 上》期末试卷.....	69
2021/2022 学年第一学期.....	72
《高等数学 A(I) 上》期末试卷.....	72
真题期中试卷解答.....	75
2020/2021 学年第一学期.....	75
《高等数学 A(I) 上》期中试卷解答.....	75
2021/2022 学年第一学期.....	77
《高等数学 A(I) 上》阶段测试 A 解答.....	77
2021/2022 学年第一学期.....	78
《高等数学 A(I) 上》阶段测试 B 解答.....	78
2021/2022 学年第一学期.....	80
《高等数学 A(I) 上》阶段测试 C 解答.....	80
2020/2021 学年第一学期.....	81
《高等数学 A(I) 上》期末试卷解答.....	81
2021/2022 学年第一学期.....	84
《高等数学 A(I) 上》期末试卷解答.....	84

第1章 极限与连续

1.1 函数

要求：理解分段函数、复合函数、初等函数、反函数、隐函数的概念与特性。

1、填空题

(1) 设 $f(x)$ 为奇函数，且当 $x \geq 0$ 时 $f(x) = \sqrt{x}$ ，则当 $x < 0$ 时

$f(x) =$ _____；

(2) 函数 $f(x) = \sqrt{3-x} + \arctan \frac{1}{x}$ 的定义域是 _____；

(3) 函数 $f(x) = \ln(\sqrt{1+x^2} - x)$ 的奇偶性为 _____；

(4) 设 $g(x) = \frac{2^x}{2^x+1}$ ，则其反函数 $g^{-1}(x) =$ _____；

(5) 设 $f(x - \frac{1}{x}) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ ，则 $f(x) =$ _____；

(6) 若 $y = f(u) = e^u$ ， $u = g(v) = -v^2$ ， $v = h(w) = \sin w$ ，

$w = \varphi(x) = \frac{1}{x}$ ，则复合函数 $y = f(g(h(\varphi(x)))) =$ _____。

2、设 $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & |x| = 1 \\ -1 & |x| > 1 \end{cases}$ ， $g(x) = \ln x$ ，求 $f[g(x)]$ 。

3、设 $f(x) = \min\{2x+5, x^2, -x+6\}$ ，试给出 $f(x)$ 的分段表达式，画出 $f(x)$ 的图形，并求 $\max f(x)$ 。

1.2 数列的极限

要求: 了解数列极限的定义, 掌握收敛数列的性质。

1、选择题

- (1) 下列命题中正确的是 ()
 (A) 发散数列必然无界 (B) 两个发散数列之和必然发散
 (C) 两个无界数列之和必然发散 (D) 收敛数列必然有界
- (2) 设有两数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$, 满足 $x_n = y_{2n}$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$,

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n =$ ()

- (A) a (B) $\frac{a}{2}$ (C) $2a$ (D) 不存在

- 2、用数列极限的定义证明: (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{4n+1} = \frac{3}{4}$ 。

- 3、若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, 而数列 $\{y_n\}$ 有界, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$ 。

1.3 函数的极限

要求: 掌握函数极限的定义和函数极限的性质。

1、填空题

- (1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在是 $f(x)$ 在 x_0 某去心邻域内有界的 _____ 条件;

- (2) $f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 都存在且相等是 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在的 _____ 条件。

- 2、用函数极限的定义证明: $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = -4$ 。

- 3、用函数极限的定义证明: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 2x^3}{x^3} = 2$ 。

1.4 无穷小量与无穷大量

要求：了解无穷小、无穷大的概念及它们之间的关系，了解无穷小的性质及无穷小与极限之间的关系。

选择题

(1) 当 $x \rightarrow x_0$ 时， $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 均为无穷小量，下列变量中

$x \rightarrow x_0$ 时可能不是无穷小量的是

(A) $3\alpha(x) - 4\beta(x)$ (B) $2\alpha(x) + 3\beta(x)$

(C) $\alpha(x)\beta(x)$ (D) $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} (\beta(x) \neq 0)$

(2) 下列命题正确的是

(A) 无界量必为无穷大量 (B) 无穷大量的和必为无穷大量

(C) 无穷大量必为无界量 (D) 两个无界量的乘积必为无界量

(3) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 是 $x \rightarrow x_0$ 时 $(f(x) - A)$ 为无穷小量的

(A) 充分而非必要条件 (B) 必要而非充分条件

(C) 充要条件 (D) 既非充分也非必要条件

1.5 极限运算法则

要求：掌握极限的四则运算法则和复合函数的极限运算法则。

1. 填空题

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+2+\cdots+n}{n+2} - \frac{n}{2} \right) =$ _____ ;

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 - 2x^2 + x}{3x^2 + 2x} =$ _____ ;

(3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x}{(x-1)^2} =$ _____ ;

(4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^3 + 2x - 3}{x^3 - 8x^2 + 1} =$ _____ ;

(5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{x^2} =$ _____ .

2. 选择题

(1) $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小量且恒不为 0，则当

$x \rightarrow x_0$ 时下列函数必为无穷大量的是

(A) $\frac{f(x)}{g(x)}$ (B) $\frac{g(x)}{f(x)}$

(C) $\frac{1}{f(x)} + \frac{1}{g(x)}$ (D) $\frac{1}{f(x)} + g(x)$

(2) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ， $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = B$ ，则下列结论正确的是

(A) $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \frac{B}{A}$

(B) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$

(C) $A = 0$ 时必有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$

(D) $A \neq 0$ 时必有 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \frac{B}{A}$

3、计算下列极限

$$(1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{3-x}}{x^2 + x - 2}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + \arctan x}{(x + \sin x)^2}$$

$$(6) \text{ 已知 } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 2} & x < -2 \\ 0 & x = -2 \\ 2x + 5 & x > -2 \end{cases} \text{ 求 } \lim_{x \rightarrow -2} f(x).$$

$$4、\text{ 已知 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 1} - ax - b \right) = 0, \text{ 求 } a \text{ 和 } b \text{ 的值。}$$

1.6 极限存在准则 两个重要极限

要求：了解极限存在准则，熟练掌握利用两个重要极限求极限。

1、填空题

(1) 数列 $\{x_n\}$ 单调有界是 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在的_____条件；

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \omega x}{x} = \underline{\hspace{2cm}}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \underline{\hspace{2cm}}$;

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{x-1}{x+2})^{x+2} = \underline{\hspace{2cm}}$, $\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

2、计算下列极限

(1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2-1)}{x^2+x-2}$

(2) 试证数列 $x_1 = \sqrt{3}$, $x_{n+1} = \sqrt{3+x_n}$ ($n=1,2,\dots$) 的极限存在。

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x \sin \frac{2}{x} + \frac{\sin 3x}{x})$

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{x}{x+1})^x$

3、用极限准则证明

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n}) = \frac{1}{2}$

1.7 无穷小的比较

要求: 熟练掌握无穷小的比较及利用等价无穷小替换求极限。

1、选择题

(1) 当 $x \rightarrow 0$ 时, 与 $\sqrt{1+x^2} - 1$ 等价的无穷小是 ()

- (A) x (B) x^2 (C) $2x^2$ (D) $\frac{x^2}{2}$

(2) 设 $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时成立的 ()

- (A) $f(x)$ 与 x 是等价无穷小 (B) $f(x)$ 与 x 是同阶但不等价无穷小
(C) $f(x)$ 是比 x 高阶的无穷小 (D) $f(x)$ 是比 x 低阶的无穷小

(3) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x^2$ 是关于 x 的 () 阶无穷小

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

2、计算下列极限

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \sin 2x)}{e^{3x} - 1}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arctan(x-1)}{e^x - e}$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{\sqrt[3]{1+x^2} - 1} (e^{\sin x} - 1)$

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{3 \sin x + x^2 \cos \frac{1}{x}}{(1 + \cos x) \ln(1 + x)}}$

3、若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = 1$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{f(x)} - e}{x}$ 。

1.8 函数的连续性与间断点

要求: 理解函数连续和间断点的概念, 了解初等函数的连续性, 了解初等函数的连续性, 会判断间断点的类型。

1、填空题

$$(1) \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x}-1}{ax} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \text{ 在 } x=0 \text{ 处连续, 则 } a = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(2) \text{ 对于函数 } f(x) = \frac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}, \quad x=0 \text{ 是其 } \underline{\hspace{2cm}} \text{ 间断点,}$$

$x=-1$ 是其 $\underline{\hspace{2cm}}$ 间断点, $x=1$ 是其 $\underline{\hspace{2cm}}$ 间断点。

2、选择题

$$(1) \text{ 函数 } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{e^x} & x < 0 \\ x & 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{\sin(2x-4)}{x-2} & x > 2 \end{cases} \text{ 的连续区间为 } \quad (\quad)$$

$$(A) (-\infty, 2) \cup (2, +\infty) \quad (B) (-\infty, +\infty)$$

$$(C) (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \quad (D) (-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$$

$$(2) \quad x=0 \text{ 是函数 } f(x) = \arctan \frac{1}{x} \text{ 的 } \quad (\quad)$$

(A) 可去间断点 (B) 跳跃间断点 (C) 无穷间断点 (D) 振荡间断点

$$(3) \quad x=0 \text{ 是函数 } f(x) = \frac{1}{1-e^x} \text{ 的 } \quad (\quad)$$

(A) 可去间断点 (B) 跳跃间断点 (C) 无穷间断点 (D) 振荡间断点

$$3、\text{ 计算 } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$4、\text{ 设函数 } f(x) = \begin{cases} e^x + a & x < 0 \\ \frac{2}{\ln(1+bx)} & x > 0 \end{cases} \text{ 在 } x=0 \text{ 处处连续, 求 } a \text{ 和 } b。$$

5、求下列函数的间断点并说明间断点类型。

$$(1) f(x) = \frac{x}{\tan x}$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{e^{1-x}} & x > 0 \\ \ln(1+x) & -1 < x \leq 0 \end{cases}$$

1.9 闭区间上连续函数性质

要求: 掌握闭区间上连续函数的性质。

- 1、证明: 方程 $x = a \cos x + b$ ($a > 0, b > 0$) 至少有一个不超过 $a+b$ 的正根。

- 6、已知 $f(x) = \frac{e^x - b}{(x-a)(x-1)}$ 有无穷间断点 $x=0$ 与可去间断点 $x=1$, 求 a, b 的值。

- 2、 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) > a$, $f(b) < b$, 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f(\xi) = \xi$ 。

1.10 总习题

1. 填空题

- (1) 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x = e^4$, 则 $a =$ _____;
- (2) 若 a, b, c, d 均为正数, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n + d^n} =$ _____;
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + n + 1} + \frac{2}{n^2 + n + 2} + \dots + \frac{n}{n^2 + n + n}\right) =$ _____;
- (4) 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} x^k \arctan \frac{2}{x^2} = 2$, 则 $k =$ _____;
- (5) 若 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - x - 2} = 2$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____;
- (6) 已知 $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2} & x \neq 0 \\ k & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 $k =$ _____;
- (7) 对于函数 $f(x) = \frac{x}{1 - e^{1-x}}$, $x = 1$ 是其 _____ 间断点,
- $x = 0$ 是其 _____ 间断点;
- (8) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $e^{x^2} - \cos x$ 是关于 x 的 _____ 阶无穷小。

2. 选择题

- (1) 设 $f(x) = \frac{\sin(x^3 + 1)}{x^2 + 1}$, 该函数是 ()
- (A) 奇函数 (B) 偶函数 (C) 周期函数 (D) 有界函数
- (2) 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, 则当 $x \rightarrow x_0$ 时成立的是 ()

- (A) $\alpha(x)$ 是较 $\beta(x)$ 高阶的无穷小
(B) $\alpha(x)$ 是较 $\beta(x)$ 低阶的无穷小
(C) $\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ 是无穷大量 (D) $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ 是无穷小量
- (3) 下列变量在给定的变化过程中为无穷小量的是 ()
- (A) $\frac{|x|}{x} - 1$ ($x \rightarrow 0$) (B) $\frac{1}{(x-1)^3} - 1$ ($x \rightarrow 1$)
(C) $e^{\frac{1}{x}}$ ($x \rightarrow 0^+$) (D) $e^{\frac{1}{x}}$ ($x \rightarrow 0^-$)
- (4) 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 下列无穷小量阶数最高的是 ()
- (A) $1 - \cos \sqrt{x}$ (B) $\sqrt{x} + x^4$
(C) $x \sin \sqrt{x}$ (D) $x \sqrt{x + \sqrt{x}}$
- (5) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} e^{x-1} =$ ()
- (A) ∞ (B) 不存在 (C) 2 (D) 0
- (6) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sqrt{1 - \cos t}} =$ ()
- (A) 0 (B) 1 (C) $\sqrt{2}$ (D) 不存在
- (7) 设 $f(x) = 2^x + 3^x - 2$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时成立的是 ()
- (A) $f(x)$ 与 x 是等价无穷小
(B) $f(x)$ 与 x 是同阶但不等价无穷小
(C) $f(x)$ 是比 x 高阶的无穷小
(D) $f(x)$ 是比 x 低阶的无穷小

(8) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\ln \cos x^3$ 是关于 x^2 的 () 阶无穷小

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 ()

(9) 下列命题中正确的是

(A) 在其定义区间内连续的函数一定是初等函数

(B) 初等函数在其定义区间内连续

(C) $f(u)$ 处处连续, x_0 是 $\varphi(x)$ 的间断点, 则复合函数

$f[\varphi(x)]$ 在 x_0 一定不连续

(D) $f(x)$ 在 x_0 处连续, $g(x)$ 在 x_0 处不连续, 则 $f(x)g(x)$

在 x_0 处一定不连续

3、求下列极限

(1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}}$

(2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1})$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sqrt{1+x}}{x}$

(4) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin mx}{\sin nx}$

(5) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x-2} \right)^{\frac{1}{x-3}}$

(6) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 (a^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{1}{n+1}}) \quad (a > 0)$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}} \quad (a_i > 0)$$

5、若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - ax - b) = 0$ ，求 a, b 的值。

$$(8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x+x^2) + \ln(1-x+x^2)}{\sec x - \cos x}$$

6、设 $x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{3(x_n + 1)}{x_n + 3} \quad (n=1, 2, \dots)$ ，证明： $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ 存在，并求出极限值。

4、设 $f(x)$ 是多项式，且 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x^3}{x^2} = 2$ ，且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ ，求 $f(x)$ 。

7、写出函数 $f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+x}}{\tan x}$ 的全部间断点, 并指明间断

点的类型。

9、 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$, 证明: $\exists \xi \in (a, b)$

使得 $f(\xi) = \frac{1}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)]$ 。

8、讨论函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}} x$ 的连续性, 如果有间断点,

说明其类型。

10、设 $f(x)$ 在 $[0, 2a]$ 上连续, 且有 $f(0) = f(2a)$, 证明: $\exists \xi \in [0, a]$

使得 $f(\xi) = f(a + \xi)$ 。

第2章 导数与微分

2.1 导数的定义

要求：理解导数概念，了解导数的几何意义及可导与连续的关系。

1、填空题

- (1) $f(x)$ 在点 x_0 可导是 $f(x)$ 在点 x_0 连续的 _____ 条件，
 $f(x)$ 在点 x_0 连续是 $f(x)$ 在点 x_0 可导的 _____ 条件；
- (2) $f(x)$ 在点 x_0 的左导数 $f'_-(x_0)$ 及右导数 $f'_+(x_0)$ 都存在且相等是 $f(x)$ 在点 x_0 可导的 _____ 条件；
- (3) 设 $f'(x_0)$ 存在，则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} = \underline{\hspace{2cm}}$ ，
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + mh) - f(x_0 - nh)}{h} = \underline{\hspace{2cm}}$ ；
- (4) $f(x) = x(x-1)(x-2) \cdots (x-10)$ ，则 $f'(9) = \underline{\hspace{2cm}}$ ；
- (5) $\left(\frac{1}{x}\right)' = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $(\sqrt{x})' = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $\left(\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x}}\right)' = \underline{\hspace{2cm}}$ ；
- 2、求曲线 $y = \ln x$ 在点 $(2, \ln 2)$ 处的切线方程与法线方程。
- 3、设 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = k$ ，证明： $f(x)$ 在 $x=0$ 点可导。
- 4、设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ ax + b & x > 1 \end{cases}$ ，问 a, b 应取什么值时，函数 $f(x)$ 处处可导。
- 5、讨论函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \sin^2 x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性、可导性。

2.2 求导法则

要求: 熟练掌握导数的基本公式与运算法则, 熟练掌握复合函数、隐函数、参数方程求导法则。

1、填空题

(1) $(\cos \frac{1}{x})' = \underline{\hspace{2cm}}$;

(2) $(\frac{1 - \ln x}{1 + \ln x})' = \underline{\hspace{2cm}}$;

(3) $[\ln(\cos e^x)]' = \underline{\hspace{2cm}}$;

(4) $(\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}})' = \underline{\hspace{2cm}}$;

(5) $f(x)$ 为可导函数, 则 $(\frac{1}{f^2(x)})' = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

2、计算题

(1) 设 $y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$, 求 y' 。

(2) 设 $y = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, 求 y' 。

(3) 设 $y = \tan a^x + \arctan x^a$ ($a > 0$), 求 y' 。

(4) 设 $y = \ln \sin \frac{x}{2} - 3^x \ln \cos \sqrt{x}$, 求 y' 。

(5) 设 $y = e^{x^2} f(x^2)$, 其中 $f(t)$ 为可导函数, 求 y' 。

3、设 $f(x) = (x^2 - a^2)g(x)$, 其中 $g(x)$ 在 $x = a$ 处连续, 求 $f'(a)$ 。

4、求由下列方程确定的隐函数 $y = y(x)$ 的导数 $\frac{dy}{dx}$ 。

(1) $e^{xy} + \cos(xy) - y^2 = 0$

5、求曲线 $\rho = 2 \sin 2\theta$ 在 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 相应点处法线的直角坐标方程。

(2) $\arctan \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$

6、求下列参数方程所确定函数的导数

(1)
$$\begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^2} \\ y = \frac{3at^2}{1+t^2} \end{cases}, \text{求 } \frac{dy}{dx}.$$

(3) $y = \sqrt[3]{\frac{(x+1)(2x+1)^2}{x+3}}$

(2) 已知 $\begin{cases} x = \cos t + t \sin t \\ y = \sin t - t \cos t \end{cases}$, 求 $\left. \frac{dx}{dy} \right|_{t=\frac{3}{4}\pi}$ 。

(4) $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$

2.3 高阶导数及相关变化率

要求: 了解高阶导数和相关变化率的概念, 会求 n 阶导数。

1、填空题 (其中 $f''(x)$ 存在)

(1) $(e^{-x} \sin x)'' =$ _____; (2) $(f(x^2))'' =$ _____;

(3) $(\cos^2 2x)^{(n)} =$ _____。

2、计算题

(1) $y = 2x^2 + x|x|$, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$ 。

(2) $\sin y + xe^y = 0$, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}}$ 。

(3) $y = x - \ln y$, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$ 。

(4) $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$ 。

(5) $\begin{cases} x = f'(t) \\ y = tf'(t) - f(t) \end{cases}$, 其中 $f(t)$ 具有二阶导数且 $f''(t) \neq 0$,

求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$ 。

(6) $y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$, 求 $y^{(n)}$ 。

3、用莱布兹公式计算 $(x^2 \sin 2x)^{(50)}$ 。

2.4 微分

(2) $y = \ln \cos \sqrt{x}$

要求: 理解微分的概念, 了解微分的几何意义及一阶微分形式不变性, 熟练掌握微分的基本公式与运算法则。

1、填空题

(1) 已知 $y = x^3 - x$, 则在 $x = 2$ 处当 $\Delta x = 0.01$ 时 $\Delta y =$ _____;

(3) $y = f(1-2x) + \sin(f(x))$ (其中 $f(x)$ 可导)

$dy =$ _____;

(2) $d\left(\frac{1}{(1+x)^2}\right) = \frac{1}{(1+x)^2} dx$; $d\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}} dx$;

(3) $d(\cos(3x+1)) = \cos(3x+1) dx$ 。

2、选择题

(1) 已知 $f(x)$ 可导, 若 $y = f(\sin x)$, 则 $dy =$ ()

(A) $f'(\sin x) d \sin x$ (B) $f'(\sin x) dx$

(C) $[f(\sin x)]' d \sin x$ (D) 前者均不对

(2) 若 $y = f(x)$, 有 $f'(x_0) = \frac{1}{2}$, 则当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 该函数在

$x = x_0$ 处的微分 dy 是 ()

(A) 与 Δx 等价的无穷小 (B) 与 Δx 同阶的无穷小

(C) 比 Δx 低阶的无穷小 (D) 比 Δx 高阶的无穷小

3、求下列函数的微分

(1) $y = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{3}$

4、已知由方程 $2y - x = (x - y) \ln(x - y)$ 确定的 y 是 x 的函数, 求 dy 。

5、设 $y = \sin(x^2)$, 求 $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dy}{d(x^2)}$, $\frac{dy}{d(x^3)}$ 。

2.5 总习题

1、填空题

(1) 已知 $f'(3)=2$, 则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-h)-f(3)}{2h} =$ _____;

(2) 设 $f'(x_0)$ 存在, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}} =$ _____;

(3) 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ (n 为正数), 问 n 在什么范围内时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处具有下面的性质: ①连续; ②可导;

③有连续的导数, ①_____, ②_____, ③_____;

(4) 若曲线 $y = x^2 + ax + b$ 和 $2y = xy^3 - 1$ 在点 $(1, -1)$ 处相切, 其

中 a, b 为常数, 则 $a =$ _____, $b =$ _____。

(5) $d\left(\frac{\sin x}{x}\right) =$ _____ $d(x^2)$ 。

2、选择题

(1) 若 $f(x)$ 是奇函数, 且 $f'(0)$ 存在, 则 $x=0$ 是 $F(x) = \frac{f(x)}{x}$ 的

- (A) 无穷间断点 (B) 可去间断点
(C) 连续点 (D) 振荡间断点

(2) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ a + b \cos x & x > 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导, 则()

- (A) $a = -2, b = 2$ (B) $a = 2, b = -2$
(C) $a = -1, b = 1$ (D) $a = 1, b = -1$

(3) 设 $f(x) = 3x^3 + x^2|x|$, 则使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数为()

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

(4) 已知函数 $f(x)$ 具有任意阶导数, 且 $f'(x) = [f(x)]^2$, 则 n 当

为大于等于 2 的整数时, $f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$ 是()

- (A) $n![f(x)]^{n+1}$ (B) $n[f(x)]^{n+1}$ (C) $[f(x)]^{2n}$ (D) $n![f(x)]^{2n}$

3、计算题

(1) 设 $y = \sin mx \cdot \cos^n x$, 求 y' 。

(2) 设 $y = \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$, 求 y' 。

(3) 设 $y = \sin^2\left(\frac{1 - \ln x}{x}\right)$, 求 y' 。

(4) 设 $y = \begin{cases} \ln(1+x) & x > 0 \\ 0 & x = 0, \text{ 求 } y' \\ \frac{1}{x} \sin^2 x & x < 0 \end{cases}$

(8) 设 $y = y(x)$ 由方程 $e^y + xy = e$ 所确定, 求 $y''(0)$ 。

(9) 设 $\begin{cases} x = 2te^t + 1 \\ y = t^3 - 3t \end{cases}$, 求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=1}$, $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=1}$ 。

(5) 设 $y = \sqrt{x \sin x \cdot \sqrt{1 - e^x}}$, 求 y' 。

(10) 设 $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \arctan t \end{cases}$, 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 。

(6) 设 $y = \sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)}$, 其中 $\varphi(x), \psi(x)$ 为可导函数, 求 y' 。

(11) 设 $y = \frac{5-x^2}{x^2-1}$, 求 $y^{(n)}$ 。

(7) 设 $y = y(x)$ 由方程 $x^y = y^x$ 所确定, 求 y' 。

(12) 设 $y = \sin^4 x + \cos^4 x$, 求 $y^{(n)}$ 。

6、设函数 $f(x)$ 在 $x \leq 1$ 时具有二阶导数, 求 a, b, c 使

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & x \leq 1 \\ a(x-1)^2 + b(x-1) + c & x > 1 \end{cases} \text{ 在 } x=1 \text{ 处具有二阶导数。}$$

(13) 设 $y = a + \ln(xy) + e^{x+y}$, 求 dy 。

4、试从 $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'}$ 导出 $\frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{y''}{(y')^3}$ 。

7、设曲线 $y = f(x)$ 与 $y = \sin x$ 在原点相切, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sqrt[n]{f\left(\frac{2}{n}\right)}$ 。

5、求证 $x^2 + y^2 = a^2$ 上任一点处的切线在两坐标轴上的截距之和为常数 a 。

8、溶液自深 18cm, 顶部直径为 12cm 的正圆锥形漏斗中漏入一直径为 10cm 的圆柱形筒中, 开始时漏斗中盛满了溶液, 已知当溶液在漏斗中深为 12cm 时, 其表面下降的速率为 1cm/min, 问此时圆柱形筒溶液表面上升的速率为多少?

第3章 微分中值定理与导数的应用

3.1 微分中值定理

要求：理解并会用罗尔、拉格朗日定理，了解并会用柯西定理。

1、填空题

(1) $f(x) = \ln \sin x$ 在区间 $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$ 上是否满足罗尔定理的条件 _____；有无定理中的数值 ξ ？ _____（有则写出其值）。

(2) 已知 $f(x) = x(x-1)(x-2)(x+1)(x+2)$ ，那么 $f'(x) = 0$ 有 _____ 个根，根所在的区间分别为 _____。

2、选择题

(1) 罗尔定理的三个条件： $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导， $f(a) = f(b)$ 是 $f(x)$ 在 (a, b) 内至少存在一点 ξ ，使 $f'(\xi) = 0$ 的

- (A) 必要条件 (B) 充分条件 (C) 充分必要条件 (D) 既非充分也非必要条件

(2) 函数 $f(x) = x^{\frac{2}{3}} \cos x$ 在 $[-1, 1]$ 上不满足罗尔定理是因为()

- (A) 在 $[-1, 1]$ 上不连续 (B) 在 $(-1, 1)$ 内有不可导点
(C) $f(1) \neq f(-1)$ (D) 以上三条都不对

3、设 $f(x)$ 在 $[0, a]$ 上连续，在 $(0, a)$ 内可导，且 $f(a) = 0$ ，证明：存在一点 $\xi \in (0, a)$ ，使 $f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$ 。

4、若方程 $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x = 0$ 有一正根 $x = x_0$ ，证明：

方程 $a_0 n x^{n-1} + a_1 (n-1) x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} = 0$ 必有一个小于 x_0 的正根。

5、设 $a > b > 0, n > 1$ ，证明： $nb^{n-1}(a-b) < a^n - b^n < na^{n-1}(a-b)$ 。

6、设 $0 < a < b$ ，函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导，试利用柯西中值定理证明：存在一点 $\xi \in (a, b)$ ，使

$$f(b) - f(a) = \xi f'(\xi) \ln \frac{b}{a}。$$

3.2 洛必达法则

要求: 熟练掌握用洛必达法则。

1、填空题

(1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + ax^2 + b}{x - 2} = 8$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____;

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} =$ _____。

2、求下列极限

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$

(4) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \left(\sin x \right)^{\frac{1}{x}}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \tan x} \right)$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \tan x$

(5) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{(\pi - 2x)^2}$

3.3 泰勒公式

要求：理解泰勒定理，知道 $[e^x, \sin x, \cos x, \ln(1+x), (1+x)^\alpha]$ 的麦克劳林展开式。

1、求函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 按 $(x+1)$ 展开的带拉格朗日余项的 n 阶泰勒公式。

3、设函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处具有二阶导数 $f''(x_0)$ ，

证明：
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2} = f''(x_0)。$$

2、求函数 $f(x) = xe^{-x}$ 的带佩亚诺余项的 n 阶麦克劳林公式。

3、计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$

3.4 函数的单调性和极值

要求: 掌握函数单调性的判断方法, 理解函数的极值概念, 掌握

求函数极值和最值的方法。

1、设 $y = x^2 e^{-x}$, 则其单减区间_____。

2、选择题

(1) 下列命题正确的是 ()

(A) 凡是驻点就是极值点 (B) 凡是极值点就是驻点

(C) 可导函数的极值点必是它的驻点

(D) 函数的极值点一定是最值点

(2) 函数 $f(x) = x^3 + 2x + q$ 的零点的个数为 ()

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 个数与 q 有关

3、确定下列函数的单调区间

(1) $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x - 7$

(2) $y = x^x (x > 0)$

4、求函数 $y = (x-4) \cdot \sqrt[3]{(x+1)^2}$ 的极值。

5、设 $y = y(x)$ 由方程 $x^3 - ax^2 y^2 + by^3 = 0$ 确定, 且 $y(1) = 1$, $x = 1$ 是驻点, 求 a, b 的值。

6、当 $x > 0$ 时, 证明: $\ln(1+x) > \frac{\arctan x}{1+x}$ 。

7、讨论方程 $\ln x = ax$ ($a > 0$) 的实根个数。

9、问函数 $f(x) = x^2 - \frac{54}{x}$ ($x < 0$) 在何处取得最小值?

8、求函数 $f(x) = x^3 + x^2 - 8x - 5$ 在 $[-4, 1]$ 上的最大值、最小值。

10、要造一圆柱形油罐，体积为 V ，求底半径 r 和高 h 各为多少时，才能使表面积最小?

3.5 函数图形的描绘

要求: 掌握曲线凹凸性的判断方法, 会求曲线的拐点与渐近线;

1、曲线 $y = 4 - \sqrt[3]{x-1}$ 的拐点是_____。

2、选择题

(1) 若 $f(-x) = f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$), 在 $(-\infty, 0)$ 内, $f'(x) > 0$,

$f''(x) < 0$, 则在 $(0, +\infty)$ 内 ()

(A) $f(x)$ 单调增加且图象凸 (B) $f(x)$ 单调增加且图象凹

(C) $f(x)$ 单调减少且图象凸 (D) $f(x)$ 单调减少且图象凹

(2) 设 $f(x)$ 二阶可导, 且 $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, 则当 $\Delta x > 0$ 时, 有 ()

(A) $\Delta y > dy > 0$ (B) $\Delta y < dy < 0$

(C) $dy > \Delta y > 0$ (D) $dy < \Delta y < 0$

3、求 $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的拐点及凹凸区间

5、求函数 $y = x \ln(e + \frac{1}{x})$ 的渐近线方程。

6、描绘函数 $y = e^{-(x-1)^2}$ 的图形

4、问 a, b 为何值时, 点 $(1, 3)$ 为曲线 $y = ax^3 + bx^2$ 的拐点。

3.6 总习题

1、填空题

(1) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + a \cos x - b \sin x}{x^2} = \frac{1}{2}$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 设 $y = (ax)^3 - (ax)^2 - ax - a$ 在 $x = 1$ 处取极小值, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$;

2、选择题

(1) 若 $f(x)$ 在 $x = a$ 处为二阶可导函数, 则

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) = \quad (\quad)$$

(A) $\frac{f''(a)}{2}$ (B) $f''(a)$ (C) $2f''(a)$ (D) $-f''(a)$

(2) 函数 $y = 6x + \frac{3}{x} - x^3$ 在 $x = 1$ 处有 $\quad (\quad)$

- (A) 极小值 (B) 极大值
(C) 拐点 (D) 既无拐点又无极值

(3) 已知 $f(x)$ 在 $U(0, \delta)$ 内有定义, $f(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x} = a$,

($a > 0$), 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 点 $\quad (\quad)$

- (A) 不可导 (B) 可导且 $f'(0) \neq 0$ (C) 取极大值 (D) 取极小值
(4) 已知方程 $x^2 y^2 + y = 1$ ($y > 0$) 确定 y 是 x 的函数, 则 $\quad (\quad)$

- (A) $y(x)$ 有极小值, 但无极大值
(B) $y(x)$ 有极大值, 但无极小值
(C) $y(x)$ 既有极大值又有极小值
(D) $y(x)$ 无极值

(5) 设在 $[0, 1]$ 上, $f''(x) > 0$ 则 $f'(0)$, $f'(1)$, $f(1) - f(0)$ 或 $f(0) - f(1)$ 的大小顺序是 $\quad (\quad)$

- (A) $f'(1) > f'(0) > f(1) - f(0)$
(B) $f'(1) > f(1) - f(0) > f'(0)$
(C) $f(1) - f(0) > f'(1) > f'(0)$
(D) $f'(1) > f(0) - f(1) > f'(0)$

(6) 设 $f(x)$ 在 $U(0, \delta)$ 内具有连续的二阶导数, $f'(0) = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{\sqrt[3]{x}} = a \quad (a < 0), \text{ 则 } \quad (\quad)$$

- (A) $x = 0$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点
(B) $x = 0$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点
(C) $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点
(D) $(0, f(0))$ 不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

(7) 曲线 $y = \frac{1 + e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}}$ $\quad (\quad)$

- (A) 没有渐近线 (B) 仅有水平渐近线
(C) 仅有铅直渐近线 (D) 既有水平渐近线又有铅直渐近线

3、求下列函数的极限

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(1+x)^x - e}$

- (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \arctan x\right)^x$
- 4、确定 a, b 使 $f(x) = x - (a + b \cos x) \sin x$ 当 $x \rightarrow 0$ 时为 x 的 5 阶无穷小量。

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{1}{2}x^2 - \sqrt{1+x^2}}{(\cos x - e^{x^2}) \sin x^2}$$

- 5、设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 上可导, 且 $f(0) = f(1) = 0$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, 证明: 必有一点 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f'(\xi) = 1$ 成立。

- (4) 设函数 $f(x)$ 二阶可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, $f''(0) = 2$,

求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{x^2}$ 。

6、设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 证明: 在 (a, b) 内有一点 ξ , 使 $\left| \frac{f(a)}{g(a)} - \frac{f(b)}{g(b)} \right| = (b-a) \left| \frac{f(a)}{g(a)} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \right|$ 。

9、求 $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + k$ ($k > 0$) 在 $(0, +\infty)$ 内零点个数。

7、函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导 ($0 \leq a < b$),

试证: 在区间 (a, b) 内存 ξ, η , 在使得 $f'(\xi) = \frac{a+b}{2\eta} f'(\eta)$ 。

10、(1) 证明: $\tan x + 2 \sin x > 3x$ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$)。

8、设在 $[0, 1]$ 上 $|f''(x)| \leq M$, 且 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内取得最大值, 证明: $|f'(0)| + |f'(1)| \leq M$ 。

(2) 设 $f(x), g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义, 恒正、可导, 且满足不等式 $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) < 0$, 则当 $x < b$ 时, 证明:
 $f(x)g(b) > f(b)g(x)$ 。

(3) 证明: 当 $-\infty < x < +\infty$ 时, $1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \geq \sqrt{1+x^2}$ 。 13、求数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 的最大值项。

11、设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内二次可导, 且有 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + xf'(x)}{x^3} = 1$, 求 $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ 。

14、一弓箭手在点射出的箭的轨迹方程为 $y = kx - \frac{k^3 + 2}{300}x^2$, 其

中 x 是箭离原点的水平距离, y 是相应的高度 (x 轴为地平线, 距离单位为 m), 正数 k 是轨迹曲线在原点处的切线的斜率, 问 (1) k 为何值时, 箭的水平射程最大? (2) k 为何值时, 箭射中 $30m$ 远处一直立墙面的高度最大?

12、求 $f(x) = \begin{cases} x^{2x}, & x > 0 \\ x+2, & x \leq 0 \end{cases}$ 的极值

15、求 $y = x + \frac{2x}{x^2 - 1}$ 的凹凸区间及拐点, 渐近线方程。

第4章 不定积分

$$(2) \int e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx$$

4.1 不定积分的概念与性质

要求：理解原函数、不定积分的概念与性质，熟记基本积分公式。

$$1、\text{已知 } f(x) = \frac{1}{2} \sin^2 x, \quad g(x) = -\frac{1}{4} \cos 2x, \quad h(x) = -\frac{1}{2} \cos^2 x,$$

试问 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 是同一函数的原函数吗？

$$(3) \int \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}\right)^2 dx$$

$$(4) \int \frac{1}{1 + \cos 2x} dx$$

$$2、\text{设 } F(x) \text{ 是 } f(x) = -\frac{1}{1+x^2} \text{ 的一个原函数，且 } F(0) = \frac{\pi}{2}, \text{ 求 } F(x)。$$

4、一曲线通过点 $(e^2, 3)$ ，且在任一点处的切线的斜率等于该点横坐标的倒数，求该曲线的方程。

3、计算下列不定积分

$$(1) \int (\sqrt{x} + 1) \left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$$

4.2 换元积分法

2、计算下列不定积分

(1) $\int \frac{1-x}{\sqrt{4-9x^2}} dx$

要求: 熟练掌握不定积分的两类换元法。

4.2.1 第一类换元法

1、填空题

(1) $\int \frac{1}{x(1+2\ln x)} dx =$ _____;

(2) $\int \frac{1}{(2x-3)^2} dx =$ _____;

(3) $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx =$ _____;

(4) $\int \frac{\sin x}{4 + \cos x} dx =$ _____;

(5) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}} dx =$ _____;

(6) $\int \frac{1}{9+4x^2} dx =$ _____;

(7) $\int \frac{e^x}{2+e^x} dx =$ _____;

(8) $\int \frac{(\arctan x)^3}{1+x^2} dx =$ _____;

(9) $\int x\sqrt{1-x^2} dx =$ _____;

(10) 已知 $\int f(x)dx = F(x) + C$, 则 $\int e^{-x} f(e^{-x})dx =$ _____。

(2) $\int \frac{x^3}{4+x^2} dx$

(3) $\int \frac{1}{\sin x \cos x} dx$

(4) $\int \frac{1+\ln x}{(x \ln x)^2} dx$

4.2.2 第二类换元法

计算下列不定积分

1、
$$\int \frac{1}{1+\sqrt{2x}} dx$$

2、
$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

3、
$$\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} dx$$

4、
$$\int \frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}} dx$$

5、
$$\int \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}} dx$$

6、
$$\int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2-1}} dx$$

4.3 分部积分法

要求: 熟练掌握不定积分的分部积分法。

1、计算下列不定积分

$$(1) \int x \sin \frac{x}{2} dx$$

$$(2) \int \frac{\ln x}{x^2} dx$$

$$(3) \int \cos(\ln x) dx$$

$$(4) \int e^{\sqrt{x}} dx$$

$$(5) \int \arcsin x dx$$

$$(6) \int x \tan^2 x dx$$

$$(7) \int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x} dx$$

2、已知 e^x 是 $f(x)$ 的一个原函数, 求 $\int xf'(x)dx$ 。

4.4 有理函数和可化为有理函数的积分

要求: 会计算有理函数、三角函数有理式及简单无理函数的积分。

计算下列不定积分

1、 $\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - x} dx$

2、 $\int \frac{x-1}{(x+1)(x^2+1)} dx$

5、 $\int \frac{1}{3 + \sin^2 x} dx$

3、 $\int \frac{1}{x(6+x^8)} dx$

6、 $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})} dx$

4.5 总习题

1、填空题

- (1) 若 $f(x)$ 的原函数为 $\sin x$, 则 $\int f'(x)dx = \underline{\hspace{2cm}}$;
 (2) 设 $f'(\ln x) = 1 + x$, 则 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$;

(3) $\frac{d}{dx} [\int f(3x)dx] = \underline{\hspace{2cm}}$.

2、选择题

- (1) 已知 $\int f(x)dx = F(x) + C$, 则 $\int xf'(1-x^2)dx = (\quad)$

(A) $F(1-x^2) + C$ (B) $\frac{1}{2} F(1-x^2) + C$

(C) $-\frac{1}{2} F(1-x^2) + C$ (D) $-F(1-x^2) + C$

- (2) 设 e^x 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $\int xf'(x)dx = (\quad)$

(A) $e^x(1-x) + C$ (B) $e^x(x-1) + C$

(C) $e^x(1+x) + C$ (D) $-e^x(1+x) + C$

- (3) 已知 $\int xf(x)dx = \arcsin x + C$, 则 $\int \frac{1}{f(x)}dx = (\quad)$

(A) $\frac{1}{3} \sqrt{(1-x^2)^3} + C$ (B) $\sqrt{(1-x^2)^3} + C$

(C) $-\sqrt{(1-x^2)^3} + C$ (D) $-\frac{1}{3} \sqrt{(1-x^2)^3} + C$

3、计算下列不定积分

(1) $\int e^{3x^2+\ln x} dx$

(2) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$

(3) $\int \frac{\ln \tan x}{\sin 2x} dx$

(4) $\int \frac{x+5}{x^2-6x+13} dx$

(5) $\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} dx$

$$(6) \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx$$

$$(10) \int e^x \sin^2 x dx$$

$$(7) \int \frac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x+3}} dx$$

$$(11) \int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx$$

$$(8) \int \frac{1}{2^x(1+4^x)} dx$$

$$(12) \int \frac{1}{\sin 2x + 2 \sin x} dx$$

$$(9) \int \frac{\cot x}{\ln(\sin x)} dx$$

$$(13) \int \frac{x^{11}}{(x^8+1)^2} dx$$

$$(14) \int \frac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2} dx$$

4、已知 $f(\ln x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$, 求 $\int f(x) dx$ 。

$$(15) \int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} dx$$

5、已知 $f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 1 \\ 2x & x > 1 \end{cases}$, 求 $\int f(x) dx$

$$(16) \int \frac{1}{\sin^3 x \cos^3 x} dx$$

$$(17) \int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)} dx$$

6、已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $\ln(x + \sqrt{1+x^2})$, 求 $\int xf''(x) dx$ 。

第5章 定积分及其应用

3、比较积分 $\int_1^2 \ln x dx$ 和 $\int_1^2 (\ln x)^2 dx$ 的大小。

5.1 定积分的概念

5.2 定积分的性质

要求：理解定积分的概念、性质及几何意义。

1、填空题

(1) $\int_{-1}^1 |x| dx =$ _____ ;

(2) $\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx =$ _____ 。

2、选择题

(1) 设 $I_1 = \int_0^1 x dx$, $I_2 = \int_0^1 \sqrt{x} dx$, $I_3 = \int_0^1 \ln(1+x) dx$ 则 ()

(A) $I_1 > I_2 > I_3$

(B) $I_1 > I_3 > I_2$

(C) $I_2 > I_1 > I_3$

(D) $I_3 > I_2 > I_1$

(2) 由曲线 $y = x(x-1)(2-x)$ 与 x 轴围成平面图形的面积 $S =$ ()

(A) $\int_0^1 x(x-1)(2-x) dx - \int_1^2 x(x-1)(2-x) dx$

(B) $-\int_0^2 x(x-1)(2-x) dx$

(C) $-\int_0^1 x(x-1)(2-x) dx + \int_1^2 x(x-1)(2-x) dx$

(D) $\int_0^2 x(x-1)(2-x) dx$

4、试将 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n^2 + 1^2} + \frac{n}{n^2 + 2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n^2} \right)$ 化为定积分。5、估计 $\int_2^0 e^{x^2-x} dx$ 的积分值。

5.3 微积分基本定理

要求: 理解积分上限函数及其求导公式; 熟练掌握牛顿-莱布尼茨公式。

1、填空题

(1) 设 $x = \int_t^0 \sin u du$, $y = \int_0^t \cos u du$, 则 $\frac{dy}{dx} =$ _____;

(2) 设 $f(x)$ 连续, 则 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\int_a^x xf(t)dt}{x-a} =$ _____;

(3) 函数 $F(x) = \int_1^x (2 - \frac{1}{\sqrt{t}})dt$ ($x > 0$) 的单调减少区间是 _____。

2、选择题

(1) 设 $f(x)$ 连续, 且 $F(x) = \int_x^{e^{-x}} f(t^2)dt$, 则 $F'(x) =$ ()

- (A) $-e^{-x}f(e^{-2x}) - f(x^2)$
 (B) $-e^{-x}f(e^{-2x}) + 2xf(x^2)$
 (C) $f(e^{-2x})2x - 2xf(x^2)$
 (D) $e^{-x}f(e^{-2x}) - f(x^2)$

(2) 函数 $f(x) = \int_0^x \frac{3t+1}{t^2-t+1} dt$ 在区间 $[0,1]$ 上 ()

(A) 单调增加 (B) 单调减少 (C) 先增后减 (D) 先减后增

(3) 函数 $f(x) = \int_0^x te^{-t} dt$ 在 $x=0$ 处取得 ()

(A) 极大值 (B) 极小值 (C) 非极值点 (D) 拐点

3、求由 $\int_0^y e^t dt + \int_0^x \cos t dt = 0$ 所决定的隐函数 y 对 x 导数 $\frac{dy}{dx}$ 。

4、求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^6} \int_0^{x^2} \sin t^2 dt$

5、计算下列定积分

(1) $\int_{-1}^0 \frac{3x^4 + 3x^2 + 1}{x^2 + 1} dx$

$$(2) \int_0^1 a^x e^x dx \quad (a \neq \frac{1}{e})$$

$$6、\text{设 } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin x, & 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & x < 0 \text{ 或 } x > \pi \end{cases}, \text{求 } F(x) = \int_0^x f(t) dt \text{ 在}$$

$(-\infty, +\infty)$ 内的表达式。

$$(3) \int_0^{2\pi} |\sin x| dx$$

$$(4) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$$

$$7、\text{求 } a、b(a>0) \text{ 的值, 使 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{bx - \sin x} \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}} dt = 1。$$

5.4 定积分的换元法与分部积分法

要求: 熟练掌握定积分的换元法和分部积分法。

5.4.1 定积分的换元积分法

1、选择题

(1) 设 $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2} \cos^4 x dx$, $N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 x + \cos^4 x) dx$,

$P = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^2 \sin^3 x - \cos^4 x) dx$, 则 ()

- (A) $N < P < M$ (B) $M < P < N$
(C) $N < M < P$ (D) $P < M < N$

(2) 设 $f(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x \sin(t-x) dt$, 则 $f(x) =$ ()

- (A) $-\sin x$ (B) $-1 + \cos x$ (C) $\sin x$ (D) $1 - \cos x$

2、计算下列定积分

(1) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx$

(2) $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx$

(3) $\int_1^4 \frac{x}{1+\sqrt{x}} dx$

3、证明: $\int_0^{\pi} \sin^n x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ 。

4、设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续、可导, 且

$F(x) = \int_0^x (x-2t)f(t)dt$ 证明: 若 $f(x)$ 是偶函数, 则 $F(x)$ 也是偶函数。

5.4.2 定积分的分部积分法

1、计算下列定积分

(1) $\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$

(5) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \sin x}{\cos^3 x} dx$

(2) $\int_0^1 x \arctan x dx$

(6) $\int_0^{\pi} \cos^8 x dx$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x dx$

2、设 $\int_0^2 f(x) dx = 1$, 且 $f(2) = \frac{1}{2}$, $f'(2) = 0$, 求 $\int_0^1 x^2 f''(2x) dx$ 。

5.5 广义积分

要求: 了解广义积分的定义, 会计算较简单的广义积分。

1、填空题(收敛还是发散, 若收敛, 填入其值)

(1) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx =$ _____ ;

(2) $\int_0^{+\infty} e^{-ax} dx (a > 0) =$ _____ ;

(3) $\int_0^2 \frac{1}{(1-x)^2} dx =$ _____ 。

2、判定下列广义积分的收敛性, 若收敛, 计算广义积分的值。

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$

(2) $\int_0^1 \ln x dx$

(3) $\int_1^e \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx$

(4) $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{|x-x^2|}} dx$

3、当 k 为何值时, 广义积分 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^k}$ 收敛? 当 k 为何值时, 广义积分发散?

5.6 定积分的几何应用

要求：掌握定积分的元素法，掌握用定积分来计算一些几何量。

1、求曲线 $y+1=x^2$ 和直线 $y=1+x$ 所围成平面图形的面积。

4、求曲线 $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$ 的长度。

2、求曲线 $\rho^2=\cos 2\theta$ 与 $\rho=\sqrt{2}\sin\theta$ 所围平面图形面积。

5、由 $y=x^3, x=2, y=0$ 所围成的图形分别绕 x 轴及 y 轴旋转所得立体的体积。

3、求曲线 $y=\ln x$ 上相应于 $\sqrt{3}\leq x\leq 2\sqrt{2}$ 的一段弧的长度。

6、求圆盘 $x^2+(y-5)^2\leq 9$ 绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积。

5.7 定积分的物理应用

要求: 掌握用定积分来计算一些物理量。

- 1、设一锥形贮水池, 深 15 米, 口径 20 米, 盛满水, 试问要把池内的水全部吸出需作多少功?

- 3、一物体按规律 $x = ct^3 (c > 0)$ 作直线运动, 介质的阻力与速度的平方成正比, 计算物体由 $x = 0$ 移至 $x = a$ 时, 克服介质阻力所作的功。

- 2、设有一半径为 R 米的半球形水池, 盛满水, 若将池中水全部吸出需作多少功?

- 4、一底为 8 米, 高为 6 米的等腰三角形片, 铅直地沉没在水中, 顶在上, 底在下且与水面平行, 而顶离水面 3 米, 试求它每面所受的压力。

5.8 总习题

1、填空题

$$(1) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln \frac{1-x}{1+x} dx = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(2) \text{ 设 } F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt, \text{ 则 } F(x) - F\left(\frac{1}{x}\right) = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+c}{x-c} \right)^x = \int_{-\infty}^c te^{2t} dt, \text{ 求 } c = \underline{\hspace{2cm}}.$$

2、选择题

$$(1) \text{ 设 } f(x) = \int_0^{\sqrt{1+x}-1} \ln(1+t) dt, g(x) = \int_0^x \arcsin t dt, \text{ 则 } x \rightarrow 0 \text{ 时}$$

()

(A) $f(x)$ 是 $g(x)$ 的高阶无穷小(B) $f(x)$ 与 $g(x)$ 的同阶无穷小(C) $f(x)$ 是 $g(x)$ 的低阶无穷小(D) $f(x)$ 与 $g(x)$ 等价

$$(2) \text{ 已知 } f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}} x, \text{ 则 } \int_0^2 f(x) dx = \underline{\hspace{2cm}} \quad (\quad)$$

(A) -1

(B) 0

(C) 1

(D) 2

$$(3) \text{ 设 } I = \int_0^s t \int_0^t f(tx) dx, \text{ 其中 } f(x) \text{ 连续, } t > 0, s > 0, \text{ 则 } I \text{ 的值}$$

(A) 依赖于 s, t (B) 依赖于 t, s , 不依赖于 s ()(C) 依赖于 s, t, x (D) 依赖于 s , 不依赖于 t

$$(4) \text{ 下列广义积分收敛的是} \quad (\quad)$$

$$(A) \int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$$

$$(B) \int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$$

$$(C) \int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx$$

$$(D) \int_e^{+\infty} \frac{1}{x \sqrt{\ln x}} dx$$

$$(5) \text{ 由曲线 } y = \sin^{\frac{3}{2}} x (0 \leq x \leq \pi) \text{ 与 } x \text{ 轴围成的平面图形绕 } x \text{ 轴旋转而成的旋转体体积是} \quad (\quad)$$

$$(A) \frac{4}{3} \quad (B) \frac{4}{3} \pi$$

$$(C) \frac{2}{3} \pi^2 \quad (D) \frac{2}{3} \pi$$

3、计算题

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \int_0^x e^{t^2} dt}{x^2 \sin 2x}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} [\int_0^u \sin t^2 dt] du}{x^8}$$

$$(3) \text{ 设 } x + y^2 = \int_0^{y-x} \cos^2 t dt, \text{ 求 } \frac{dy}{dx}.$$

$$(4) \int_0^1 \frac{1}{x + \sqrt{1-x^2}} dx$$

$$(8) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1 + \cos 2x} dx$$

$$(5) \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx$$

$$(9) \int_0^1 \frac{xe^x}{(1+e^x)^2} dx$$

$$(6) \int_{\frac{3}{4}}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}-1} dx$$

$$(10) \int_0^{+\infty} e^{-2x} \sin x dx$$

$$(7) \int_0^{\pi} x^2 \sin^2 x dx$$

$$(11) \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)(1+x^2)} dx$$

4、设 $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ 1+x^2, & x < 0 \end{cases}$, 求 $\int_1^3 f(x-2)dx$

6、设 $f(x) = \int_0^x e^{-y^2+2y} dy$, 求 $\int_0^1 (1-x)^2 f(x) dx$ 。

5、设 $f(x) = \begin{cases} 1, & x < -1 \\ \frac{1}{2}(1-x), & -1 \leq x \leq 1 \\ x-1, & x > 1 \end{cases}$, 求 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内的表达式。

7、设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 在开区间 $(0, 1)$ 可微, 且满足 $f(1) = k \int_0^{\frac{1}{k}} x e^{1-x} f(x) dx$ ($k > 1$), 求证: 至少存在一点 $\eta \in (0, 1)$, 使得 $f'(\eta) = (1 - \frac{1}{\eta}) f(\eta)$ 。

8、设函数 $f(x)$ 在 $[0, a]$ ($a > 0$) 上有连续导数, 且 $f(0) = 0$ 证明:

$$\left| \int_0^a f(x) dx \right| \leq \frac{Ma^2}{2}, \quad \text{其中 } M = \max_{0 \leq x \leq a} |f'(x)|.$$

10、求曲线 $y = |\ln x|$, $x = e$, $x = \frac{1}{e}$ 及 $y = 0$ 所围平面图形的面积。

9、设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可微, 且 $x \in (0, 1)$, $0 < f'(x) < 1$, $f(0) = 0$,

$$\text{证明: } \left[\int_0^1 f(x) dx \right]^2 > \int_0^1 f^3(x) dx.$$

11、过点 $(1, 0)$ 作抛物线 $y = \sqrt{x-2}$ 的切线, 求由这条切线、抛物线及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积。

第6章 常微分方程

(3) $ydx + \sqrt{x^2 + 1}dy = 0$

6.1 微分方程的基本概念

要求：理解微分方程的阶、解、通解、特解、初始条件等概念。

6.2 一阶微分方程

6.2.1 可分离变量的微分方程

要求：熟练掌握可分离变量方程的解法，会解齐次方程。

1、解下列可分离变量的方程。

(1) $y' + x^2y = 0$

2、用适当的变量代换求下列方程的通解。

(1) $xy' = y(1 + \ln y - \ln x)$

(2) $y' = \frac{1 + y^2}{xy(1 + x^2)}$

(2) $x^2ydx - (x^3 + y^3)dy = 0$

6.2.2 一阶线性微分方程

要求: 熟练掌握一阶线性方程的解法, 了解常数变易法, 会解伯努利方程。

1、求下列一阶线性微分方程的通解。

(1) $y' + y = e^{-x}$

(2) $(x - 2xy - y^2)y' + y^2 = 0$

(2) $y' + y \cos x = \sin x \cos x, y(0) = 1$

3、求 $y' + \frac{y}{x} = x^2 y^6$ 的通解。

2、求下列微分方程满足初始条件的特解。

(1) $y' - \frac{1}{x}y = x^2, y(1) = 1$

4、求一连续可导函数 $f(x)$, 使其满足下列方程

$$f(x) = \sin x - \int_0^x f(x-t) dt .$$

6.2.3 几类可降阶的高阶微分方程

要求：会用降阶解法解三类方程： $y^{(n)} = f(x)$ 、 $y'' = f(x, y')$ 、

$$y'' = f(y, y').$$

1、求下列方程的通解。

(1) $y''(1 + e^x) + y' = 0$

2、求下列微分方程满足初始条件的特解。

(1) $(1 - y)y'' + 2(y')^2 = 0, y|_{x=1} = 2, y'|_{x=1} = -1$

(2) $y'' = 1 + (y')^2$

(2) $y'' - \frac{1}{x}y' = xe^x, y|_{x=1} = 1, y'|_{x=1} = e$

6.3 高阶线性微分方程

6.3.1 高阶线性微分方程解的结构

要求：理解线性微分方程解的性质及解的结构定理。

6.3.2 常系数线性微分方程

要求：熟练掌握二阶线性常系数齐次微分方程的解法；熟练掌握自由项为多项式、指数函数、正弦函数、余弦函数以及它们的和与积的几种线性常系数非齐次方程的解法。

1、填空题

(1) 已知二阶线性非齐次微分方程的三个特解 $y_1 = 1, y_2 = x$,

$y_3 = x^2$, 该方程的通解为_____;

(2) 微分方程 $y'' - 9y = 0$ 的通解为_____;

(3) 微分方程 $y'' - 4y' = 0$ 的通解为_____;

(4) 微分方程 $y'' - 2y' + y = 0$ 的通解为_____;

(5) 微分方程 $y'' + y' + y = 0$ 的通解为_____。

2、求下列微分方程的通解

(1) $y''' + y' = 0$

(2) $y'' + 2\lambda y' + y = 0$ (λ 为实常数)

3、写出下列方程含待定系数的特解形式 (无需求出系数)。

(1) $y'' - 9y = x^2 e^{3x}$;

$y^* =$

(2) $y'' - 8y' + 20y = 5xe^{4x} \sin 2x$

$y^* =$

(3) $y'' - 2y' + y = e^x \sin x$;

$y^* =$

(4) $y'' - 2y' + 2y = e^x + x \cos x$;

$y^* =$

4、求下列方程的通解。

(1) $y'' - 4y' + 4y = x$

5、求下列方程满足给定初始条件的特解。

(1) $y'' + 2y' + 2y = xe^{-x}$, $y(0) = 0, y'(0) = 0$

(2) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$;

(2) $y'' + 9y = \cos x$, $y(\frac{\pi}{2}) = y'(\frac{\pi}{2}) = 0$

(3) $y'' + y' = \sin x$

6.3.3 欧拉方程

要求：掌握欧拉方程的解法。
求下列方程的解。

1、 $x^2 y'' - 4xy' + 6y = x$

2、 $x^2 y'' - xy' + 4y = x \sin(\ln x)$

6.4 总习题

1、选择题

(1) 若连续函数满足 $f(x) = \int_0^{2x} f(\frac{t}{2})dt + \ln 2$, 则 $f'(x)$ ()

(A) $e^{2x} \ln 2$ (B) $2e^{2x} \ln 2$ (C) e^x (D) $2e^{2x}$

(2) 微分方程 $y'' + y = \cos x$ 的特解形式为 ()

(A) $\cos x$ (B) $x^2(a \cos x + b \sin x)$ (4) $3xy' - y - 2xy^4 \ln x = 0$

(C) $x(a \cos x + b \sin x)$ (D) $a \cos x + b \sin x$

2、求下列微分方程通解, 或满足给定初值条件的特解。

(1) $(1 + e^x)yy' = e^x, y(1) = 1$

(2) $(x + y \cos(\frac{y}{x}))dx - x \cos(\frac{y}{x})dy = 0$

(5) $x^2 y'' - (y')^2 = 0$

(6) $y'' = 2yy', y(0) = y'(0) = 1$

(2) $y'' + y' + y = \sin^2 x$

3、求下列方程的通解 (或特解)。

(1) $y'' - 4y' + 4y = 3 + e^{-2x}$

(3) $y'' - 2y' + y = e^x + e^{-x}, y(0) = 1, y'(0) = 2$

(4) $y'' - 2y' + 2y = 4e^x \cos x$, $y(\pi) = 0$, $y'(\pi) = -2\pi e^\pi$

5、设函数 $f(x)$ 满足 $\int_0^x (x-t)f(t)dt = 2x + \int_0^x f(t)dt$, 试求 $f(x)$

4、设函数 $f(x)$ 在 $x > 0$ 时可微, 且满足方程

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x} \int_1^x f(t)dt, \text{ 求 } f(x)。$$

6、由坐标原点向曲线的切线所作垂线之长等于切点的横坐标, 求此曲线方程。

7、已知曲线 c 过点 $A(1,0)$ 及 $B(0,1)$, 且 $\widehat{AB}$ 为凸弧, P 为曲线 c 上异于点 B 的任一点, 已知弧 $\widehat{PB}$ 与弦 $\overline{PB}$ 所围成的平面图形 的面积等于点 P 的横坐标的立方, 求曲线 c 的方程。

8、设 $f(x)$ 为连续函数, 且满足

$$f(x) = \sin x - \int_0^x (x-t)f(t)dt, \text{ 求 } f(x)。$$

2021/2022 学年第一学期 《高等数学 A(1)上》阶段测试 A 卷

一、选择题 (本大题分 2 小题, 每小题 3 分, 共 6 分)

1、当 $x \rightarrow 0$ 时, 无穷小 $\frac{x^6}{1-\sqrt{\cos x^2}}$ 是 x 的几阶无穷小 ()

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 5

2、设 $f(x)$ 是可导函数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1)-f(1-x)}{2x} = -1$, 则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线斜率为 ()

(A) 0 (B) 1 (C) -1 (D) -2

二、填空题 (本大题分 2 小题, 每小题 4 分, 共 8 分)

1、设 $y = x^{\tan x} (x > 0)$, 则 $\frac{dy}{dx} =$ _____;

2、设 $f(x) = \frac{2^x + 1}{2^x - 2}$, 则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的 _____ 间断点.

三、(本题 8 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cot x - \frac{1}{x})$.

四、计算下列各题 (每题 8 分, 共计 16 分)

1、设 $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a(1 - \sin^3 t) \end{cases}$, 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.

2、设 $y = y(x)$ 由方程 $e^{x+y} - xy = 1$ 确定, 求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}, \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=0}$.

2021/2022 学年第一学期

《高等数学 A(1)上》阶段测试 B 卷

五、(本题 7 分) 设 $f(x)$ 可导且 $f''(0)=6$, 又

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0, \text{ 求 } \lim_{x \rightarrow 0} [1 + f(x)]^{\frac{1}{x^2}}.$$

一、选择题 (本大题分 2 小题, 每小题 3 分, 共 6 分)

1、设 $y = x f(\sin x) - 2 \cos \frac{\pi}{6}$, 则 $\frac{dy}{dx} =$ ()

(A) $f(\sin x) \cos x + x f'(\sin x)$

(B) $f(\sin x) + x f'(\sin x) \cos x$

(C) $f(\sin x) + x f'(\sin x) \cos x + 1$

(D) $f(\sin x) + x f'(\sin x) + 1$

2、当 $x \rightarrow 0$ 时, $e^{\tan 2x} - e^{\sin 2x}$ 是与 x^n 同阶的无穷小量, 则 n 的值为 ()

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

二、填空题 (本大题分 2 小题, 每小题 4 分, 共 8 分)

1、设 $y = \sin(x^2)$, 则 $\frac{dy}{d(x^3)} =$ _____;

2、 $f(x)$ 在 $x = a$ 处二阶可导, 则

$$f(x_0) = \frac{1}{2}; \quad 2) \exists 0 < \xi < \eta < 1, \text{ 使 } \frac{1}{f'(\xi)} + \frac{1}{f'(\eta)} = 2.$$

六、(本题 5 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0)=0, f(1)=1$. 证明: 1) $\exists x_0 \in (0, 1)$, 使得

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2} = \frac{f''(a)}{2}.$$

三、(本题 8 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan \frac{\pi x}{2}}{2}$.

四、计算下列各题 (每题 8 分, 共计 16 分)

1、设 $\begin{cases} x = t - \ln(1+t) \\ y = t^3 + t^2 \end{cases}$, 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.

五、(本题 7 分) 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2(e^x - 1)}{e^x - 1} & x > 0 \\ 1 & x = 0 \\ -\frac{2}{x^2} \ln \frac{1}{1+x^2} & x < 0 \end{cases}$ 的

连续性, 若有间断点, 请指出间断点的类型.

2、设 $y = y(x)$ 由方程 $e^{x+y} + \cos(xy) = 2$ 确定, 求

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}, \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=0}.$$

六、(本题 5 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导,

且 $f(0)=f(1)=0$, $f(\frac{1}{2})=1$, 试证: (1) $\exists \eta \in (\frac{1}{2}, 1)$, 使

$f(\eta)=\eta$; (2) $\exists \xi \in (0, \eta)$, 使得 $f'(\xi)-\frac{1}{3}[f(\xi)-\xi]=1$.

2021/2022 学年第一学期

《高等数学 A(1)上》阶段测试 C 卷

一、选择题 (本大题分 2 小题, 每小题 3 分, 共 6 分)

1、当 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{1+e^x}, & x \neq 0 \\ \frac{2}{2+3e^x}, & x=0 \end{cases}$ 时, 则在 $[-1,1]$ 上 ()

(A) $f(x)$ 有界, 且 $x=0$ 是可去间断点

(B) $f(x)$ 有界, 且 $x=0$ 是跳跃间断点

(C) $f(x)$ 有界, 且 $x=0$ 是无穷间断点

(D) $f(x)$ 无界

2、当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 下列无穷小量关于 x 阶数最低的是 ()

(A) $x + \sin x^2$ (B) $\sqrt{x} + \arcsin x$

(C) $\csc x - \cot x$ (D) $\ln(\cos \sqrt{x})$

二、填空题 (本大题分 2 小题, 每小题 4 分, 共 8 分)

1、设 $y=(\sin x)^x (0 < x < \frac{\pi}{2})$, 则 $\frac{dy}{dx} = \underline{\hspace{2cm}}$;

2、函数 $y=\ln(1-2x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $y^{(n)}(0)=\underline{\hspace{2cm}}$.

三、(本题 8 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1})$.

五、(本题 7 分) 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内二阶可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x + \frac{f(x)}{x})^{\frac{1}{x}} = e^3$, 求 $f(0), f'(0), f''(0)$.

四、计算下列各题 (每题 8 分, 共计 16 分)

1、设 $\begin{cases} x = t - \ln(1+t^2) \\ y = \arctan t \end{cases}$, 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.

2、已知由方程 $xy + \ln y = x^2$ 所确定的隐函数 $y = y(x)$, 求 $y'(0), y''(0)$.

六、(本题 5 分) 设 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上二阶可导, 且 $f(1) = f(2)$. 证明: 至少存在一个 $\xi \in (1, 2)$, 使得 $f''(\xi) = 6 \frac{f'(\xi)}{1-\xi}$.

2022/2023 学年第一学期

《高等数学 A(1)上》阶段测试卷

一、选择题 (本大题分 7 小题, 每小题 5 分, 共 35 分)

1、 $x=0$ 是函数 $f(x)=\frac{x^2-x}{|\sin x|}$ 的 ()

- (A) 无穷间断点 (B) 可去间断点
(C) 跳跃间断点 (D) 振荡间断点

2、已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x = e^4$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+a^n+3^n} = ()$

- (A) 1 (B) 2 (C) a (D) 3

3、设 $f'(2)=1$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2-2x)-f(2)}{x} = ()$

- (A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) 2

4、当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 下列无穷小量关于 x 的阶数最高的是

()

- (A) $\sqrt{x+x^4}$ (B) $\sqrt[3]{1+x^2}-1$

- (C) $\arcsin \sqrt{x^3}$ (D) $\ln(1+x^3)$

5、已知函数 $f(x)=\begin{cases} x, & x \leq 0; \\ \frac{a+b \cos x}{x}, & x > 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导, 则

()

- (A) $a=-2, b=2$

- (B) $a=2, b=-2$

(C) $a = -1, b = 1$ (D) $a = 1, b = -1$

6、若 $\varphi(x)$ 是单调连续函数 $f(x)$ 的反函数, 且 $f(1) = 2$,

$$f'(1) = \sqrt{3}, \text{ 则 } \varphi'(2) = \quad (\quad)$$

$$(A) 2\sqrt{3} \quad (B) -\sqrt{3} \quad (C) \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (D) -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

7、下列式子中正确的是

(A) $(\csc x)' = -\csc x \cot x$

(B) $(\arcsin \frac{x}{a})' = -\sqrt{a^2 - x^2} \quad (a > 0)$

(C) $(\tan 2x)' = \frac{2}{1+4x^2}$

(D) $(a^x)' = x \ln a \quad (a > 0)$

二、填空题 (本大题分 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分)

1、极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}) =$ _____;

2、极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} [x \sin \frac{2}{x} + \frac{\arctan 3x}{x}] =$ _____;

3、已知 $f(x) = x(x-1)(x-2) \cdots (x-2022)$, 则

$$f'(0) = \text{_____};$$

4、设 $y = x^{\sin x}$, 则 $\frac{dy}{dx} =$ _____;

5、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}(e^{\sin x} - 1)$ _____.

三、求极限 (本题 7 分) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x}$

四、计算下列各题 (3 小题, 每题 7 分, 共计 21 分)

1、设
$$\begin{cases} x = t - \ln(1+t^2), \\ y = \arctan \frac{1-t}{1+t} \end{cases}, \text{ 求 } \frac{dy}{dx}.$$

- 2、求曲线 $L: r = e^\theta$ 在 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 对应点处的切线方程.

五、(本题 12 分) 求函数

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1-x) + \sin \frac{1}{x^2-1}, & x \leq 0; \\ \frac{x^3-x}{\tan \pi x}, & x > 0 \end{cases}$$

的间断点, 并指出其

类型.

- 3、设函数 $y = y(x)$ 由 $e^y + 3x = x^2 + y$ 所确定, 求 $\frac{dy}{dx}$ 及

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}.$$

2021/2022 学年第一学期

《高等数学 A(I)上》期末试卷

一、选择题 (本题 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

1、点 $x=1$ 是函数 $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的 ()

- (A) 连续点 (B) 可去间断点
(C) 跳跃间断点 (D) 无穷间断点

2、设 $f(x) = \int_0^{\arcsin x} (\sqrt[3]{1+t^2} - 1) dt$, $g(x) = x^3$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, ()

- (A) $f(x)$ 是 $g(x)$ 的高阶无穷小
(B) $f(x)$ 是 $g(x)$ 的同阶但不等价无穷小
(C) $f(x)$ 是 $g(x)$ 的等价无穷小
(D) $f(x)$ 是 $g(x)$ 的低阶无穷小

3、 e^x 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $\int x f'(x) dx =$ ()

- (A) $e^x(1-x) + C$ (B) $e^x(1+x) + C$
(C) $e^x(x-1) + C$ (D) $-e^x(1+x) + C$

4、下列广义积分发散的是 ()

- (A) $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} dx$ (B) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$
(C) $\int_1^{+\infty} x e^{-x^2} dx$ (D) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx$

5、已知函数 $y = y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y = xy\Delta x + \alpha$,且当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, α 是 Δx 的高阶无穷小量, $y(0)=1$, 则

$y(2) =$ ()
(A) e (B) e^2 (C) π (D) π^2

二、填空题 (本题 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分)

1、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{\pi}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{\pi}{\sqrt{n^2+n}} \right) =$ _____;2、写出 $x e^{-x}$ 带皮亚诺余项的 n 阶麦克劳林公式 _____;3、曲线 $2y = -1 + xy^3$ 在点 $(1, -1)$ 处的切线方程为 _____;4、定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1+e^x} dx =$ _____;5、微分方程 $y'' - 2y' + 2y = 4e^x \cos x$ 的特解形式为 _____.

三、计算下列极限 (本题 7 分)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{1-\cos x}}.$$

四、解答题 (本大题分 2 小题, 每小题 7 分, 共 14 分)

1、 设 $\begin{cases} x=(t^2+1)e^{-t}, \\ y=t-\ln(1+t^2) \end{cases}$, 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.

2、 $\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}} dx$

2、 求曲线 $y = x \arctan x$ 的凹凸区间和斜渐近线方程.

六、(本题 9 分) 设 $0 < a < 1$, 记直线 $y = ax$ 与抛物线

$y = x^2$ 所围成的图形为 A_1 , 其面积为 S_1 , 这两条线以及直线 $x = 1$ 所围成的图形记为 A_2 , 其面积为 S_2 .

(1) 试确定 a 的值, 使 $S_1 + S_2$ 达到最小, 并求出最小值;

(2) 求该最小值所对应的平面图形 A_1 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积.

五、计算下列积分(分 2 小题, 每题 7 分, 共 14 分)

1、 $\int x \tan^2 x dx$

七、(本题 8 分) 求微分方程 $y'' - 3y' + 2y = xe^x$ 的通解, 及满足初始条件 $y(0) = 0, y'(0) = 0$ 的特解.

八、(本题 8 分)

证明: 当 $1 < x < 2$ 时, $(2x-3)\ln(2-x) - x + 1 < 0$.

九、(本题 5 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(\frac{1}{2}) = 1, \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{x-1} = 0, \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = \frac{1}{8}$, 证明:

(1) 存在 $\eta \in (\frac{1}{2}, 1), f(\eta) = \eta$;

(2) 存在 $\xi \in (0, \eta), f'(\xi)(f(\xi) - \xi) + f'(\xi) = 1$.

2022/2023 学年第一学期

《高等数学 A(1)上》 期末试卷

1、当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 下列无穷小量关于 x 的阶数最高的是 ()

- (A) $\frac{1 - \cos x}{\sqrt{x}}$ (B) $\sqrt[3]{1 + x^2} - 1$ (C) $\arcsin \sqrt{x^3}$ (D) $\int_0^{\tan x} t^2 dt$

2、已知 $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x-1} - e}{x-1}, & x \neq 1; \\ a, & x = 1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 处连续, 则 $a =$ ()

- (A) -1 (B) 2 (C) $2e$ (D) e

3、设 $f(x)$ 是可导函数, 且 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-h)}{2h} = -1$, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的法线斜率为 ()

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) 2 (C) -2 (D) $-\frac{1}{2}$

4、已知 $f(x)$ 连续, 则 $\frac{d}{dx} [\int f(\sin x) dx] =$ ()

- (A) $f'(\sin x)$ (B) $f(\sin x)$
(C) $f'(\sin x) \cos x$ (D) $f(\sin x) + C$

5、微分方程 $y'' - 2y' + y = e^x \cos x$ 的特解形式为 ()

- (A) $y = ae^x \sin x$ (B) $y = e^x [ax + b] \cos x + (cx + d) \sin x$
(C) $y = e^x (a \cos x + b \sin x)$ (D) $y = xe^x (a \cos x + b \sin x)$

二、填空题 (本大题分 5 小题, 每题 4 分, 共 20 分)

1、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{2}{n})^{-6n} = e^{-6}$, 则 $k =$ _____.

2、函数 $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ 的凹区间为 _____.

3、微分方程 $y'' + 9y = 0$ 的通解为 _____.

4、曲线 $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} (0 \leq x \leq 1)$ 的弧长为 _____.

5、广义积分 $\int_2^{+\infty} xe^{-x} dx =$ _____.

三、计算下列极限 (本题分 2 小题, 每题 7 分, 共 14 分)

1、 $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x^2})$

2、 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} \arctan \sqrt{t} dt}{x^3}$

四、解答题 (本题 7 分)

设 $y = y(x)$ 由方程 $xy + 2 \ln x = y^4$ 确定, 求 $\frac{dy}{dx} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=1}}, \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=1}}$.

六、(本题 9 分) 由曲线段 $x^2 + y^2 = 4 (y \geq 0, 0 \leq x \leq 1)$ 与直线 $x=0, x=1$ 及 x 轴所围的平面图形记为 D . (1) 求平面图形 D 的面积; (2) 求图形分别绕 x 轴、 y 轴旋转一周所得旋转体的体积.

五、计算下列积分(本题分 2 小题, 每题 7 分, 共 14 分)

1、 $\int x \arctan x dx$

2、 $\int_1^4 \frac{1}{x(1+\sqrt{x})} dx$

七、(本题 8 分) 判断方程 $\ln x = \frac{x}{e} - \int_0^1 x \sqrt{1-x^2} dx$ 在 $(0, +\infty)$ 内的实根个数, 并说明理由.

八、(本题 8 分) 求微分方程 $y'' - \frac{1}{x}y' = xe^x$ 满足初始条件 $y|_{x=1} = 1, y'|_{x=1} = e$ 的特解.

九、(本题 5 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且严格单调增加, 求证: $\int_a^b xf(x)dx > \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x)dx$ ($a < b$)

真题期中试卷解答

2021/2022 学年第一学期

《高等数学 A(1)上》阶段测试 A 解答

一、选择题 (本题 2 小题, 每小题 3 分, 共 6 分)

1、(B) 2、(D)

二、填空题 (本题 2 小题, 每小题 4 分, 共 8 分)

1、设 $y = x^{\tan x} (x > 0)$, 则 $\frac{dy}{dx} = x^{\tan x} (\sec^2 x \ln x + \frac{\tan x}{x})$.2、设 $f(x) = \frac{2^x + 1}{2^x - 2}$, 则 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的 跳跃 间断点.三、(本题 8 分) 求极限求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cot x - \frac{1}{x})$.

解: $\lim_{x \rightarrow 0} (\cot x - \frac{1}{x}) = \lim_{x \rightarrow 0} (\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{2x} = 0$

四、计算下列各题 (每题 8 分, 共计 16 分)

1、设 $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a(1 - \sin^3 t) \end{cases}$, 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}$.

解: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{-3a \sin^2 t \cos t}{-3a \cos^2 t \sin t} = \tan t$,

$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d(\frac{dy}{dx})/dt}{dx/dt} = \frac{\sec^2 t}{-3a \cos^2 t \sin t} = -\frac{1}{3a \cos^4 t \sin t}$.

2、设 $y = y(x)$ 由方程 $e^{x+y} - xy = 1$ 确定, 求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}, \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0}$.

解: $e^{x+y}(1+y') - y - xy' = 0$ $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = \frac{y - e^{x+y}}{e^{x+y} - x} \Big|_{x=0} = -1$

$e^{x+y}(1+y')^2 + e^{x+y}y'' - 2y' - xy'' = 0$ $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0} = -2$.

五、(本题 7 分) 设 $f(x)$ 可导且 $f''(0) = 6$, 又

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} [1 + f(x)]^{\frac{1}{x^2}}$.

解: $\because \lim_{x \rightarrow 0} [1 + f(x)]^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} [1 + f(x)]^{\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{f(x)}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} f''(0) = 3$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} [1 + f(x)]^{\frac{1}{x^2}} = e^3$.

六、(本题 5 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0, f(1) = 1$. 证明:

1) $\exists x_0 \in (0, 1)$, 使得 $f(x_0) = \frac{1}{2}$;

$$2) \exists 0 < \xi < \eta < 1, \text{ 使 } \frac{1}{f'(\xi)} + \frac{1}{f'(\eta)} = 2.$$

$$\text{证明: } 1) \text{ 令 } \varphi(x) = f(x) - \frac{1}{2} \quad \because \varphi(0) = -\frac{1}{2}, \varphi(1) = \frac{1}{2},$$

$\varphi(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 由零点定理, $\exists x_0 \in (0, 1)$, 使得 $\varphi(x_0) = 0$,

$$\text{即 } f(x_0) = \frac{1}{2}.$$

2) $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内可导, 分别在 $[0, x_0]$ 和 $[x_0, 1]$ 上应用拉格朗日中值定理, $\exists \xi \in (0, x_0), \eta \in$

$$(x_0, 1), \text{ 使得 } \frac{f(x_0) - f(0)}{x_0 - 0} = f'(\xi), \quad \frac{\frac{1}{2} - 0}{x_0} = \frac{1}{2x_0} = f'(\xi)$$

$$\frac{f(1) - f(x_0)}{1 - x_0} = f'(\eta), \quad \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 - x_0} = \frac{1}{2(1 - x_0)} = f'(\eta)$$

$$\therefore \frac{1}{f'(\xi)} + \frac{1}{f'(\eta)} = 2x_0 + 2(1 - x_0) = 2.$$

2021/2022 学年第一学期

《高等数学 A(1) 上》阶段测试 B 解答

一、选择题 (本题 2 小题, 每小题 3 分, 共 6 分)

1、(B) 2、(C)

二、填空题 (本大题分 2 小题, 每小题 4 分, 共 8 分)

$$1、\text{ 设 } y = \sin(x^2), \text{ 则 } \frac{dy}{d(x^3)} = \frac{2 \cos(x^2)}{3x}.$$

2、 $f(x)$ 在 $x = a$ 处二阶可导, 则

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2} = f''(a).$$

三、(本题 8 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\frac{\tan \frac{\pi x}{2}}{2}} = \lim_{x \rightarrow 1} [1 + (1-x)]^{\frac{1}{1-x} \tan \frac{\pi x}{2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2}}$.

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\frac{\tan \frac{\pi x}{2}}{2}} = \lim_{x \rightarrow 1} [1 + (1-x)]^{\frac{1}{1-x} \tan \frac{\pi x}{2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\cot \frac{\pi x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{-\csc^2 \frac{\pi x}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\frac{\tan \frac{\pi x}{2}}{2}} = e^{\frac{2}{\pi}}$$

四、计算下列各题 (每题 8 分, 共计 16 分)

$$1、\text{ 设 } \begin{cases} x = t - \ln(1+t) \\ y = t^3 + t^2 \end{cases}, \text{ 求 } \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}.$$

$$\text{解: } \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{3t^2 + 2t}{1/(1+t)} = 3t^2 + 5t + 2,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(\frac{dy}{dx})/dt}{dx/dt} = \frac{(6t+5)(1+t)}{1}.$$

2、设 $y = y(x)$ 由方程 $e^{x+y} + \cos(xy) = 2$ 确定, 求

$$\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=0}, \frac{d^2y}{dx^2}\bigg|_{x=0}.$$

解:

$$\because e^{x+y}(1+y') - \sin(xy)(y+xy') = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}\bigg|_{x=0} = \frac{y \sin(xy) - e^{x+y}}{e^{x+y} - \sin(xy)}\bigg|_{x=0} = -1$$

$$\because e^{x+y}(1+y')^2 + e^{x+y}y'' - \cos(xy)(y+xy')^2 - 2y' \sin xy - xy'' \sin xy = 0$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2}\bigg|_{x=0} = 0$$

$$\text{五、(本题 7 分) 讨论函数 } f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2(e^x - 1)}{e^x - 1} & x > 0 \\ 1 & x = 0 \\ -\frac{2}{x^2} \ln \frac{1}{1+x^2} & x < 0 \end{cases} \text{ 的}$$

连续性, 若有间断点, 请指出间断点的类型.

解: 在 $x \neq 0$ 处, 函数 $f(x)$ 连续

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin 2(e^x - 1)}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2(e^x - 1)}{e^x - 1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x^2} \ln \frac{1}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} \frac{-2 \ln(1+x^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2 \frac{x^2}{x^2} = 2$$

又 $f(0) = 1$, $\therefore x = 0$ 是函数 $f(x)$ 的可去间断点.六、(本题 5 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导,且 $f(0) = f(1) = 0$, $f(\frac{1}{2}) = 1$, 试证: (1) $\exists \eta \in (\frac{1}{2}, 1)$, 使

$$f(\eta) = \eta; (2) \exists \xi \in (0, \eta), \text{ 使得 } f'(\xi) - \frac{1}{3}[f(\xi) - \xi] = 1.$$

证明: 1) 令 $\varphi(x) = f(x) - x$,

$$\varphi(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \varphi(1) = f(1) - 1 = -1,$$

由零点定理, $\exists \eta \in (\frac{1}{2}, 1)$, 使得 $\varphi(\eta) = 0$, 即 $f(\eta) = \eta$.2) $F(x) = e^{\frac{1}{3}x}[f(x) - x]$, $F(x)$ 在 $[0, \eta]$ 上连续, 在 $(0, \eta)$ 内可导, $F(0) = 0 = F(\eta)$, 由罗尔中值定理可得, $\exists \xi \in (0, \eta)$, 使得

$$F'(\xi) = -\frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}\xi}[f(\xi) - \xi] + e^{\frac{1}{3}\xi}[f'(\xi) - 1] = 0,$$

$$\text{即 } f'(\xi) - \frac{1}{3}[f(\xi) - \xi] = 1.$$

2021/2022 学年第一学期

《高等数学 A(1)上》阶段测试 C 解答

一、选择题 (本题 2 小题, 每小题 3 分, 共 6 分)

1、(B) 2、(B)

二、填空题 (本题分 2 小题, 每小题 4 分, 共 8 分)

1、设 $y = (\sin x)^x (0 < x < \frac{\pi}{2})$, 则

$$\frac{dy}{d \tan x} = \frac{(\sin x)^x [\ln \sin x + x \cot x] \cos^2 x}{d \tan x}$$

2、函数 $y = \ln(1-2x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $y^{(n)}(0) = -2^n (n-1)!$

三、(本题 8 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$.

$$\begin{aligned} \text{解: } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

四、计算下列各题 (每题 8 分, 共计 16 分)

1、设 $\begin{cases} x = t - \ln(1+t^2) \\ y = \arctan t \end{cases}$, 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.

$$\begin{aligned} \text{解: } \frac{dy}{dx} &= \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\frac{1}{1+t^2}}{1 - \frac{2t}{1+t^2}} = \frac{1}{(t-1)^2}, \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)/dt}{dx/dt} = \frac{(-2) \cdot \frac{1}{(t-1)^3}}{1 - \frac{2t}{1+t^2}} = -2 \frac{1+t^2}{(t-1)^5}. \end{aligned}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)/dt}{dx/dt} = \frac{(-2) \cdot \frac{1}{(t-1)^3}}{1 - \frac{2t}{1+t^2}} = -2 \frac{1+t^2}{(t-1)^5}.$$

2、已知由方程 $xy + \ln y = x^2$ 所确定的隐函数 $y = y(x)$, 求 $y'(0), y''(0)$.

$$\text{解: } y + xy' + \frac{1}{y}y' = 2x, \text{ 即 } y^2 + xy y' + y' = 2xy, \quad (1)$$

将 $x=0, y=1$ 代入 (1) 得, $y'(0) = -1$
(1) 式两端再求导, 得

$$3yy' + x(y')^2 + xy y'' + y'' = 2y + 2xy' \quad (2)$$

将 $x=0, y=1, y'(0) = -1$ 代入 (2) 式, 得 $y''(0) = 5$.

五、(本题 7 分) 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内二阶可导且

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x + \frac{f(x)}{x} \right)^{\frac{1}{x}} = e^3, \text{ 求 } f(0), f'(0), f''(0).$$

解: 由 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内二阶可导, 可知 $f(x), f'(x)$ 在该邻域内连续。

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x + \frac{f(x)}{x} \right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \left(1 + x + \frac{f(x)}{x} \right)} = e^3,$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \left(1 + x + \frac{f(x)}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \frac{f(x)}{x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + \frac{f(x)}{x^2} \right] = 3, \text{ 即, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 2 \end{aligned}$$

$$\text{从而 } f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} x^2 = 0.$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} x = 0.$$

$$\begin{aligned} 2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{2x} = \frac{1}{2} f''(0), \text{ 故} \\ f''(0) &= 4. \end{aligned}$$

六、(本题 5 分) 设 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上二阶可导, 且 $f(1) = f(2)$. 证明: 至少存在一个 $\xi \in (1, 2)$, 使得

$$f''(\xi) = 6 \frac{f'(\xi)}{1-\xi}.$$

解: $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上连续, 在 $(1, 2)$ 内可导, $f(1) = f(2)$, 故由罗尔定理, 存在 $c \in (1, 2)$, 使得 $f'(c) = 0$.

设 $F(x) = f'(x)(1-x)^6$, 则 $F(x)$ 在 $[1, c]$ 上连续, 在 $(1, c)$ 内可导, $F(c) = F(1) = 0$, 由罗尔定理, 存在 $\xi \in (1, c) \subset (1, 2)$, 使得 $F'(\xi) = 0$, 即

$$f''(\xi)(1-\xi)^6 + 6(1-\xi)^5(-1)f'(\xi) = 0,$$

因为 $1-\xi \neq 0$, 所以 $f''(\xi)(1-\xi) = 6f'(\xi)$, 即证

2022/2023 学年第一学期

《高等数学 A(1)上》阶段测试解答

一、选择题 (本题 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

1、(C) 2、(D) 3、(A) 4、(D) 5、(B) 6、(C) 7、(A)

二、填空题 (本大题分 4 小题, 每小题 5 分, 共 25 分)

1、极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} \right) = \frac{1}{2}$

2、极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[x \sin \frac{2}{x} + \frac{\arctan 3x}{x} \right] = 2$

3、已知 $f(x) = x(x-1)(x-2)\cdots(x-2022)$, 则 $f'(0) = 2022!$

4、设 $y = x^{\sin x}$, 则 $\frac{dy}{dx} = x^{\sin x} \left[\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right]$

5、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{\sqrt[3]{1+x^2} - 1} = -\frac{3}{2}$

三、求极限 (本题 7 分)

1、 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x}$

解: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x} = e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x \ln \sin x} = e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x (\sin x - 1)} = e^{-\frac{3}{2}}$

而 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x (\sin x - 1) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x} (\sin x - 1) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x - 1)}{\cos x}$

令 $x = t + \frac{\pi}{2}$,

上式 $= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t + \frac{\pi}{2}) - 1}{\cos(t + \frac{\pi}{2})} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t - 1}{-\sin t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\frac{t^2}{2}}{-t} = 0$,

故原式 $= e^0 = 1$.

四、计算下列各题 (3 小题, 每题 7 分, 共计 21 分)

1、设 $\begin{cases} x = t - \ln(1+t^2), \\ y = \arctan \frac{1-t}{1+t} \end{cases}$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

解: $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{1}{1+(\frac{1-t}{1+t})^2} \cdot (-\frac{1-t}{1+t})'}{\frac{1}{1+t^2} - \frac{2t}{1+t^2}}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\frac{(1+t)^2}{(1+t)^2 + (1-t)^2} \left(\frac{2-(1+t)}{1+t} \right)'}{\frac{(1-t)^2}{1+t^2}} \\
 &= \frac{\frac{(1+t)^2}{2(1+t^2)} \left[-\frac{2}{(1+t)^2} \right]}{\frac{(1-t)^2}{1+t^2}} = -\frac{1}{(1-t)^2}.
 \end{aligned}$$

2、求曲线 $L: r = e^\theta$ 在 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 对应点处的切线方程.

解: $L: \begin{cases} x = e^\theta \cos \theta, \\ x = e^\theta \sin \theta, \end{cases}$

$$\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{e^\theta (\sin \theta + \cos \theta)}{e^\theta (\cos \theta - \sin \theta)} = \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\cos \theta - \sin \theta}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \text{ 对应点 } (0, e^{\frac{\pi}{2}}), \quad k = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\cos \theta - \sin \theta} \bigg|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = -1,$$

故切线方程为 $y - e^{\frac{\pi}{2}} = -x$, 即 $x + y = e^{\frac{\pi}{2}}$.

3、设函数 $y = y(x)$ 由 $e^{xy} + 3x = x^2 + y$ 所确定, 求 $\frac{dy}{dx}$ 及

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}.$$

解: 方程两边对 x 求导, 得 $e^{xy}(y + xy') + 3 = 2x + y'$

$$y' = \frac{3 + ye^{xy} - 2x}{1 - xe^{xy}}.$$

将 $x = 0, y = 1$ 代入上式, 得 $y'(0) = 4$.

五、(本题 12 分) 求函数

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1-x) + \sin \frac{1}{x^2-1}, & x \leq 0; \\ \frac{x^3-x}{\tan \pi x}, & x > 0 \end{cases} \text{ 的间断点, 并指出其类型.}$$

解: $x = -1, x = k(k=1, 2, \dots), x = k + \frac{1}{2}(k=0, 1, 2, \dots)$ 是间断点; $x = 0$ 是可疑间断点.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\ln(1-x) + \sin \frac{1}{x^2-1} \right] = -\sin 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3-x}{\tan \pi x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x^2-1)}{\pi x} = \frac{-1}{\pi},$$

$f(0^-) \neq f(0^+)$, 故 $x = 0$ 是跳跃间断点.

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \left[\ln(1-x) + \sin \frac{1}{x^2-1} \right] \text{ 不存在, 振荡, 所以}$$

$x = -1$ 是振荡间断点。

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-x}{\tan \pi x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)(x+1)}{\tan \pi x},$$

令 $x = 1+t$, 则

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(t+1)t(t+2)}{\tan \pi(t+1)}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(t+1)t(t+2)}{\tan \pi t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(t+1)t(t+2)}{\pi t} = \frac{2}{\pi}, \text{ 所以 } x=1 \text{ 是可去间断点.}$$

$$\text{对于 } x=k(k=2,3,\dots), \quad \lim_{x \rightarrow k} f(x) = \lim_{x \rightarrow k} \frac{x^3 - x}{\tan \pi x} = \infty, \\ \text{所以 } x=k(k=2,3,\dots) \text{ 是无穷间断点.}$$

$$\text{对于 } x=k+\frac{1}{2}(k=0,1,2,\dots),$$

$$\lim_{x \rightarrow k+\frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow k+\frac{1}{2}} \frac{x^3 - x}{\tan \pi x} = 0,$$

$$\text{所以 } x=k+\frac{1}{2}(k=0,1,2,\dots) \text{ 是可去间断点.}$$

2021/2022 学年第一学期

《高等数学 A(I)上》期末试卷解答

一、选择题 (本题 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

1、(D) 2、(B) 3、(C) 4、(A) 5、(B)

二、填空题 (本题 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分)

$$1、\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{\pi}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{\pi}{\sqrt{n^2+n}} \right) = \pi.$$

2、写出 xe^{-x} 带皮亚诺余项的 n 阶麦克劳林公式

$$x - x^2 + \frac{x^3}{2!} - \frac{x^4}{3!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{(n-1)!} + o(x^n)$$

3、曲线 $2y = -1 + xy^3$ 在点 $(1, -1)$ 处的切线方程为 $y+1=x-1$

$$4、\text{定积分 } \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+e^x} dx = \frac{\pi}{4}$$

5、微分方程 $y'' - 2y' + 2y = 4e^x \cos x$ 的特解形式为

$$y^* = xe^x(a \cos x + b \sin x).$$

三、计算下列极限 (本题 7 分)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$$

$$\text{解: 原式} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{1-\cos x} \ln \left(\frac{\sin x}{x} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \left(1 + \frac{\sin x}{x} - 1 \right)}$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{\sin x}{x} - 1 \right)}$$

$$\frac{\sin x - x}{x^2}$$

$$\text{而 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1-\cos x} \left(\frac{\sin x}{x} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$$

$$\frac{x^2}{2}$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}}{3x^2} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{原式} = e^{-\frac{1}{3}}$$

四、解答题 (本题分 2 小题, 每小题 7 分, 共 14 分)

$$1、\text{ 设 } \begin{cases} x = (t^2 + 1)e^{-t} \\ y = t - \ln(1 + t^2) \end{cases}, \text{ 求 } \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}.$$

$$\text{解: } \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{1 - \frac{2t}{1+t^2}}{e^{-t}[2t - (1+t^2)]} = \frac{\frac{(t-1)^2}{1+t^2}}{-e^{-t}(t-1)^2} = -\frac{e^t}{1+t^2}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)/dt}{dx/dt} = \frac{-e^t \frac{(t-1)^2}{(1+t^2)^2}}{-e^{-t}(t-1)^2} = \frac{e^{2t}}{(1+t^2)^2}.$$

2、求曲线 $y = x \arctan x$ 的凹凸区间和斜渐近线方程.

$$\text{解: } y' = \arctan x + \frac{x}{1+x^2}, y'' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{(1+x^2) - 2x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{2}{(1+x^2)^2} > 0, \text{ 所以曲线在 } (-\infty, +\infty) \text{ 上是凹的.}$$

求斜渐近线:

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2},$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x[\arctan x + \frac{\pi}{2}]$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\arctan x + \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = -1$$

故斜渐近线为 $y = -\frac{\pi}{2}x - 1$.

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2},$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x[\arctan x - \frac{\pi}{2}]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = -1$$

故斜渐近线为 $y = \frac{\pi}{2}x - 1$.

五、计算下列积分(本题分 2 小题, 每题 7 分, 共 14 分)

1、 $\int x \tan^2 x dx$

$$\begin{aligned} \text{解: } \int x \tan^2 x dx &= \int x(\sec^2 x - 1) dx = \int x dx \tan x - \int x dx \\ &= x \tan x - \int \tan x dx - \frac{x^2}{2} = x \tan x + \ln |\cos x| - \frac{x^2}{2} + C \end{aligned}$$

$$2、\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}} dx$$

解: 令 $x = \sin t$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{1+\cos t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 - \frac{1}{1+\cos t}] dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2 \cos^2 \frac{t}{2}} dt = \frac{\pi}{2} - \tan \frac{t}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1 \end{aligned}$$

六、(本题 9 分)

设 $0 < a < 1$, 记直线 $y = ax$ 与抛物线 $y = x^2$ 所围成的图形为 A_1 , 其面积为 S_1 , 这两条线以及直线 $x=1$ 所围成的图形记为 A_2 ,

其面积为 S_2 .

(1) 试确定 a 的值, 使 $S_1 + S_2$ 达到最小, 并求出最小值;

(2) 求该最小值所对应的平面图形 A_1 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积.

解: (1) 由题设, 直线 $y = ax$ 与抛物线 $y = x^2$ 交点为 $(0, 0), (a, a^2)$.

$$S(a) = S_1 + S_2 = \int_0^a (ax - x^2) dx + \int_a^1 (x^2 - ax) dx$$

$$= \left(\frac{a}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^a + \left(\frac{1}{3} x^3 - \frac{a}{2} x^2 \right) \Big|_a^1 = \frac{a^3}{3} - \frac{a}{2} + \frac{1}{3}$$

令 $S'(a) = a^2 - \frac{1}{2} = 0$, 得 $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (舍去 $a = -\frac{1}{\sqrt{2}}$), 又

$$S''(a) = 2a, S''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} > 0,$$

所以当 $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, $S_1 + S_2$ 取极小值, 也是最小值: 最小值为

$$S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{6\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

(2) 所求旋转体的体积为

$$V = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} 2\pi x \left(\frac{1}{\sqrt{2}} x - x^2 \right) dx = \pi \left[\frac{\sqrt{2}}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^4 \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{\pi}{24}$$

七、(本题 8 分) 求微分方程 $y'' - 3y' + 2y = xe^x$ 的通解, 及满足初始条件 $y(0) = 0, y'(0) = 0$ 的特解.

解: 特征方程: $r^2 - 3r + 2 = 0$, 特征根 $r_1 = 1, r_2 = 2$.

对应齐次方程的通解为

$$Y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

设特解 $y^* = x(ax + b)e^x = (ax^2 + bx)e^x$, 代入原方程, 得

$-2ax + 2a - b = x$, 解得 $a = -\frac{1}{2}, b = -1$, 故特解为

$$y^* = -\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)e^x.$$

于是方程通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)e^x$.

由条件 $y(0) = 0, y'(0) = 0$, 解得 $C_1 = -1, C_2 = 1$, 所求特解为

$$y = -e^x + e^{2x} - \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)e^x.$$

八、(本题 8 分)

证明: 当 $1 < x < 2$ 时, $(2x-3)\ln(2-x) - x + 1 < 0$.

证明: 令 $\varphi(x) = (2x-3)\ln(2-x) - x + 1$, $\varphi(1) = 0$,

$$\varphi'(x) = 2\ln(2-x) - \frac{2x-3}{2-x} - 1 = 2\ln(2-x) + \frac{1-x}{2-x},$$

则当 $1 < x < 2$ 时, $\varphi'(x) < 0$, 从而, $\varphi(x)$ 在 $[1, 2)$ 上单调递减, 而 $\varphi(1) = 0$, 所以当 $1 < x < 2$ 时, $\varphi(x) < \varphi(1) = 0$, 因此, 当 $1 < x < 2$ 时, $(2x-3)\ln(2-x) - x + 1 < 0$. 证毕

九、(本题 5 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1, \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{x-1} = 0, \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = \frac{1}{8}, \text{ 证明:}$$

(1) 存在 $\eta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $f(\eta) = \eta$;

(2) 存在 $\xi \in (0, \eta)$, $f'(\xi)(f(\xi) - \xi) + f'(\xi) = 1$.

证明: (1) 由 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{x-1} = 0$ 及 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 得

$$f(1) = 1. \quad \text{令 } \varphi(x) = f(x) - x, \quad \varphi\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0,$$

$\varphi(1) = f(1) - 1 = -1 < 0$, 由连续函数介值定理知, 存在

$\eta \in (\frac{1}{2}, 1)$, 使 $\varphi(\eta) = 0$, 即 $f(\eta) = \eta$.

(2) 因为 $\int_0^1 (f(x) - x) dx = 0$, 由积分中值定理, 知存在 $c \in (0, \frac{1}{2})$, 使得 $\frac{1}{2}(f(c) - c) = 0$, 即 $f(c) - c = 0$. 令 $F(x) = e^{f(x)}(f(x) - x)$, 则 $F(x)$ 在 $[c, \eta]$ 上连续, 在 (c, η) 内可导, $F(c) = F(\eta) = 0$, 由罗尔定理, 至少存在 $\xi \in (c, \eta) \subset (0, \eta)$, 使得 $F'(\xi) = 0$, 即 $e^{f(\xi)}[f'(\xi)(f(\xi) - \xi) + f'(\xi) - 1] = 0$, 又 $e^{f(\xi)} \neq 0$, 故 $f'(\xi)(f(\xi) - \xi) + f'(\xi) = 1$.

2022/2023 学年第一学期

《高等数学 A(1)上》期末试卷解答

一、选择题 (本题 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

1、(D) 2、(C) 3、(A) 4、(B) 5、(C)

二、填空题 (本大题分 5 小题, 每题 4 分, 共 20 分)

1、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{2}{n})^{-kn} = e^{-6}$, 则 $k = \underline{3}$.

2、函数 $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 的凹区间为 $(-\infty, 0]$.

3、微分方程 $y'' + 9y = 0$ 的通解为 $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$.

4、曲线 $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} (0 \leq x \leq 1)$ 的弧长为 $\underline{\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)}$.

5、广义积分 $\int_2^{+\infty} xe^{-x} dx = \underline{\frac{3}{e^2}}$.

三、计算下列极限 (本题分 2 小题, 每题 7 分, 共 14 分)

1、 $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x^2})$ 2、 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} \arctan \sqrt{t} dt}{x^3}$

解: $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x^2}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2 \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2} = \frac{1}{6}$.

2、解: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} \arctan \sqrt{t} dt}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan x \cdot 2x}{3x^2}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^2}{3x^2} = \frac{2}{3}$.

四、解答题 (本题 7 分)

设 $y = y(x)$ 由方程 $xy + 2 \ln x = y^4$ 确定, 求 $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=1, y=1}$, $\frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{x=1, y=1}$.

解: 两边对 x 求导: $y + xy' + \frac{2}{x} = 4y^3 \cdot y'$

将 $x=1, y=1$ 代入得 $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=1, y=1} = 1$.

两边再对 x 求导: $y' + y' + xy'' - \frac{2}{x^2} = 12y^2 \cdot y'^2 + 4y^3 \cdot y''$

将 $x=1, y=1$, $y'=1$ 代入得: $\frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{x=1, y=1} = -4$.

五、计算下列积分(本题分 2 小题, 每题 7 分, 共 14 分)

1、 $\int x \arctan x dx$ 解: $\int x \arctan x dx = \frac{1}{2} \int \arctan x dx x^2$

$$= \frac{1}{2} [x^2 \arctan x - \int x^2 d \arctan x]$$

$$= \frac{1}{2} [x^2 \arctan x - \int \frac{x^2}{1+x^2} dx] = \frac{1}{2} [x^2 \arctan x - \int (1 - \frac{1}{1+x^2}) dx]$$

$$= \frac{1}{2} [x^2 \arctan x - (x - \arctan x)] + C$$

$$= \frac{1}{2} [(x^2 + 1) \arctan x - x] + C$$

2、 $\int_1^4 \frac{1}{x(1+\sqrt{x})} dx$ 解: 令 $\sqrt{x} = t$

$$\text{原式} = \int_1^2 \frac{2t}{t^2(1+t)} dt = 2 \int_1^2 \frac{1}{t(1+t)} dt$$

$$= 2 \int_1^2 (\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}) dt = 2 \ln \frac{t}{1+t} \Big|_1^2 = 2 \ln \frac{4}{3}$$

六、(本题 9 分) 由曲线段 $x^2 + y^2 = 4 (y \geq 0, 0 \leq x \leq 1)$ 与直线 $x=0, x=1$ 及 x 轴所围的平面图形记为 D . (1) 求平面图形 D 的面积;(2) 求图形分别绕 x 轴、 y 轴旋转一周所得旋转体的体积.解: (1) $S = \int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx$ 令 $x = 2 \sin t$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 + \cos 2t) dt = [2t + \sin 2t]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(2) 所求旋转体的体积为

$$V_x = \int_0^1 \pi(4-x^2) dx = \frac{11}{3} \pi$$

$$V_y = 2\pi \int_0^1 x \sqrt{4-x^2} dx = -\pi \frac{2}{3} (4-x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{2}{3} (8-3\sqrt{5}) \pi$$

七、(本题 8 分) 判断方程 $\ln x = \frac{x}{e} - \int_0^1 x \sqrt{1-x^2} dx$ 在 $(0, +\infty)$ 内的实根个数, 并说明理由.解: 令 $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + \int_0^1 x \sqrt{1-x^2} dx$,
 $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e}$, 当 $x \in (0, e)$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x \in (e, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$,
故 $f(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 在 $[e, +\infty)$ 上单调递减, $f(x)$ 在 $x=e$ 处取得极大值, 也是最大值

$$f(e) = \int_0^1 x \sqrt{1-x^2} dx = a > 0.$$

又 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{e} + \frac{a}{x}) = -\infty$,所以 $f(x)$ 在 $(0, e)$, $(e, +\infty)$ 内与 x 轴各有一个交点, 即方程在 $(0, e)$, $(e, +\infty)$ 内各有一个实根.八、(本题 8 分) 求微分方程 $y'' - \frac{1}{x} y' = x e^x$ 满足初始条件 $y|_{x=1} = 1, y'|_{x=1} = e$ 的特解.解: 令 $y' = p(x)$, 则 $y'' = p'(x)$, 原方程化为

$$p' - \frac{1}{x}p = xe^x \quad (\text{一阶线性非齐次方程})$$

$$\begin{aligned} y' = p &= e^{\int \frac{1}{x} dx} \left(\int xe^x \cdot e^{-\int \frac{1}{x} dx} dx + C_1 \right) \\ &= x \int e^x dx + C_1 = x(e^x + C_1) \end{aligned}$$

将 $y|_{x=1} = e$ 代入, 得 $C_1 = 0$, 从而 $y' = xe^x$, 再积分, 得

$$y = (x-1)e^x + C_2.$$

将 $y|_{x=1} = 1$ 代入, 得 $C_2 = 1$, 从而 $y = (x-1)e^x + 1$.

九、(本题 5 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且严格单调增加,

$$\text{求证: } \int_a^b xf(x) dx > \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx \quad (a < b)$$

证明: 令 $F(x) = \int_a^x tf(t) dt - \frac{a+x}{2} \int_a^x f(t) dt$

$$F'(x) = xf(x) - \frac{1}{2} \int_a^x f(t) dt - \frac{(x+a)}{2} f(x)$$

$$F'(x) = \frac{x-a}{2} f(x) - \frac{1}{2} \int_a^x f(t) dt$$

$$= \frac{x-a}{2} f(x) - \frac{x-a}{2} f(\xi) \quad \xi \in (a, x)$$

$$= \frac{x-a}{2} [f(x) - f(\xi)] > 0, \quad (\text{当 } x > a \text{ 时})$$

故 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上严格单调增, $F(b) > F(a) = 0$, 即

$$\int_a^b xf(x) dx > \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx, \text{ 即证!}$$

