

第7章 多元函数微分学及其应用

7.1 多元函数的概念

要求：了解二元函数极限、连续等概念，了解有界闭区域上连续函数的性质。

1、填空题

(1) 函数 $z = \ln(y - x^2) + \sqrt{1 - y - x^2}$ 定义域为 $\{(x, y) | y \leq 1 - x^2, -\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}\}$

(2) 函数 $u = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 定义域为 $\{(x, y, z) | |z| \leq \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \neq 0\}$

(3) $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2} = \text{不存在}$ (极限值或不存在):

(4) $f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ 在点(0,0)处 连续

(连续或间断)。

2、证明极限 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ 不存在。

证明：考虑路径 $y = kx$ ，则

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = kx}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - k^2)x^2}{(1 + k^2)x^2} = \frac{1 - k^2}{1 + k^2}$$

k 不同，极限不同，故原极限不存在。

3、求下列各极限

(1) $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)e^{x^2 y^2}}$

解：令 $x = \rho \cos \theta$ $y = \rho \sin \theta$ ，则

$$\text{原式} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \rho^2}{\rho^2 e^{\rho^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta}}$$

$$= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \rho^2}{\rho^2 e^{\rho^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta}}$$

$$= 0$$

(2) $\lim_{(x, y) \rightarrow (+\infty, +\infty)} (x^2 + y^2)e^{-(x+y)}$

解：原式 $= \lim_{(x, y) \rightarrow (+\infty, +\infty)} \frac{x^2}{e^x} \cdot \frac{1}{e^y} + \lim_{(x, y) \rightarrow (+\infty, +\infty)} \frac{y^2}{e^y} \cdot \frac{1}{e^x}$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} \cdot \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^y} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} \cdot \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^2}{e^y}$$

$$= 0$$

7.2 偏导数与全微分

要求: 理解偏导数、全微分等概念, 知道函数可微的必要条件与充分条件, 了解多元函数可微、偏导存在及连续的相互关系。

1、填空题

(1) 设 $z = x^2 \arctan \frac{y}{x}$, 则 $\frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(1,1)} = \underline{\frac{1}{2}}$:

(2) 设 $z = e^{\sin xy}$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} = \underline{ye^{\sin xy} \cos xy}$:

(3) 设 $z = xe^{-xy}$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \underline{e^{-xy}(x^2y - 2x)}$:

(4) 设 $z = 2xe^{-y} - 3\sqrt{x} + \ln 3$, 则 $dz = \underline{(2e^{-y} - \frac{3}{2\sqrt{x}})dx - 2xe^{-y}dy}$:

(5) 设 $z = \ln(x^2 + y^2)$, 则 $dz \Big|_{(1,0)} = \underline{2dx}$:

(6) 设 $z = e^{xy}$, 则当 $x=1, y=1, \Delta x=0.15, \Delta y=0.1$ 时的微分 $= \underline{0.25e}$.

2、求下列函数的一阶偏导数

(1) $f(x, y, z) = x^y y^z$

解: $f_x = yx^{y-1}y^z$

$f_y = x^y \ln y y^z + x^y y^{z-1}$

$f_z = x^y y^z \ln y$

(2) $z = (1+xy)^y$

解: $\ln z = y \ln(1+xy)$

对 x 求导, $\frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot \frac{1}{1+xy} \cdot y, \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y^2(1+xy)^y}{1+xy} = y^2(1+xy)^{y-1}$

对 y 求导, $\frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial y} = \ln(1+xy) + y \cdot \frac{x}{1+xy} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = (1+xy)^y \ln(1+xy) + xy(1+xy)^{y-1}$

3、设 $z = x \ln(xy)$, 求 $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$ 及 $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$.

解: $\frac{\partial z}{\partial x} = \ln(xy) + x \cdot \frac{1}{xy} \cdot y = \ln(xy) + 1,$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{xy} \cdot x = \frac{1}{y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{xy} \cdot y = \frac{1}{x}$

$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 0, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = -\frac{1}{y^2}$

4、验证 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 满足 $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{2}{r}$.

解: $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot 2x = \frac{x}{r}$

$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{1}{r} + x \cdot \frac{-1}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}$

同理 $\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3}, \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3}$

$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{3}{r} - \frac{1}{r^3}(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{2}{r}$

7.3 多元复合函数求导法

要求：熟练掌握复合函数求导法，会求复合函数二阶偏导数。

1、填空题（其中 f, φ 的一阶偏导数连续）

(1) 设 $u = xyz, x = 2t + 1, y = t^2, z = 3t - 1$, 则 $\frac{du}{dt} = 24t^3 + 3t^2 - 2t$;

(2) 设 $z = \arctan(xy), y = e^x$, 则 $\frac{dz}{dx} = \frac{e^x(1+x)}{1+x^2} e^{2x}$;

(3) 设 $z = xyf(\frac{y}{x})$, 且 $f(u)$ 可导, 则 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2xyf(\frac{y}{x}) = 2z$;

2、求下列函数的偏导数（其中 f 的二阶偏导数连续）

(1) 设 $u = f(x, xy, xyz)$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$.

解: $\frac{\partial u}{\partial x} = f'_1 + yf'_2 + yzf'_3$

$\frac{\partial u}{\partial y} = xf'_2 + xyzf'_3$

$\frac{\partial u}{\partial z} = xyzf'_3$

(2) 设 $z = f(xy, \frac{x}{y})$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

解: $\frac{\partial z}{\partial y} = yf'_1 + \frac{1}{y}f'_2 = yf'_1(xy, \frac{x}{y}) + \frac{1}{y}f'_2(xy, \frac{x}{y})$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f'_1 + y[f''_{11}x + f''_{12}(-\frac{x}{y^2})] - \frac{1}{y^2}f'_2$
 $+ \frac{1}{y}[f''_{21}x - f''_{22}(-\frac{x}{y^2})]$
 $= f'_1 + xyf''_{11} - \frac{1}{y^2}f'_2 - \frac{x}{y^3}f''_{22}$

(3) 设 $z = f(x^2 + y^2)$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

解: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xf' = 2xf'(x^2 + y^2)$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2x \cdot 2y f''(x^2 + y^2) = 4xy f''(x^2 + y^2)$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2f'(x^2 + y^2) + 2xf'(x^2 + y^2) \cdot 2x$
 $= 2f' + 4x^2 f''$

(4) 设 $z = f(\sin x, \cos y, e^{x+y})$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

解: $\frac{\partial z}{\partial y} = (-\sin y)f'_2 + e^{x+y}f'_3$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -\sin y[f''_{21}\cos x + f''_{23}e^{x+y}] + e^{x+y}f''_{31}$
 $+ e^{x+y}[f''_{32}\cos x + f''_{33}e^{x+y}]$
 $= -\cos x \sin y f''_{21} - e^{x+y} \sin y f''_{23} + e^{x+y} f''_{31}$
 $+ e^{x+y} \cos x f''_{32} + e^{2x+y} f''_{33}$

7.4 隐函数求导法

要求: 会求隐函数 (包括方程组确定的隐函数) 的导数。

1. 设 $\sin(xy) - x^2y = 0$, 求 $\frac{dy}{dx}$.解: 令 $F(x, y) = \sin(xy) - x^2y$, 则

$$F_x = y \cos(xy) - 2xy, F_y = x \cos(xy) - x^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = \frac{2xy - y \cos(xy)}{x \cos(xy) - x^2}$$

2. 设 $e^z - xy = 0$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.解: 令 $F(x, y, z) = e^z - xy$, 则

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{F_{xz}}{F_z} = -\frac{-y}{e^z - xy} = \frac{y}{e^z - xy}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{e^z - xy} \right) = \frac{y \cdot (-1) \cdot (-y)}{(e^z - xy)^2} = \frac{-y^2}{(e^z - xy)^2}$$

$$= \frac{-y^2}{(e^z - xy)^2}$$

3. 函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $F(z^2 - x^2, z^2 - y^2) = 0$ 所确定, 其中函数 F 可微, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.解: 方程两边对 x 求偏导得

$$F_1'(2z \frac{\partial z}{\partial x} - 2x) + F_2' \cdot 2z \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x F_1'}{z(F_1' + F_2')}$$

方程两边对 y 求偏导得

$$F_1' \cdot 2z \frac{\partial z}{\partial y} + F_2'(2z \frac{\partial z}{\partial y} - 2y) = 0$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y F_2'}{z(F_1' + F_2')}$$

解: 方程两边对 x 求导

$$\cos(xy)(y + xy') - 2xy - x^2y' = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = y' = \dots$$

解: 方程两边对 x 求偏导

$$e^z \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - y - xy \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x} = \dots$$

方程两边对 x 再求偏导

$$e^z \cdot \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) + e^z \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - xy \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$

$$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dots = \frac{2z^2 - 2z - 3}{x^2(z-1)^3}$$

解: 方程两边对 x 求导

$$0 = dF = F_1' d(z^2 - x^2) + F_2' d(z^2 - y^2)$$

$$= F_1'(2z dz - 2x dx) + F_2'(2z dz - 2y dy)$$

$$\therefore dz = \frac{1}{z(F_1' + F_2')} (x F_1' dx + y F_2' dy)$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x} = \dots, \frac{\partial z}{\partial y} = \dots$$

4. 求由下列参数方程组所确定的函数的导数或偏导数

(1) 设 $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 20 \end{cases}$, 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$.解: 方程两边对 x 求导

$$\begin{cases} z' = 2x + 2y \cdot y' \\ 2x + 4y \cdot y' + 6z \cdot z' = 0 \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} 2y \cdot y' - z' = -2x \\ 2y y' + 3z z' = -x \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\begin{vmatrix} -2x & -1 \\ -x & 3z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2y & -1 \\ 2y & 3z \end{vmatrix}} = \frac{-6xz - x}{6yz + 2y}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\begin{vmatrix} 2y & -2x \\ 2y & -x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2y & -1 \\ 2y & 3z \end{vmatrix}} = \frac{x}{3z + 1}$$

(2) 设 $\begin{cases} u = f(ux, v + y) \\ v = g(u - x, v^2 y) \end{cases}$, 其中 f, g 具有一阶连续导数,求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$.解: 方程两边对 x 求偏导得:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f_1'(u + x \frac{\partial u}{\partial x}) + f_2' \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = g_1' \left(\frac{\partial u}{\partial x} - 1 \right) + g_2' 2v y \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$(1 - x f_1') \frac{\partial u}{\partial x} - f_2' \frac{\partial v}{\partial x} = u f_1'$$

$$g_1' \frac{\partial u}{\partial x} + (2y v g_2' - 1) \frac{\partial v}{\partial x} = g_1'$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u f_1' (2y v g_2' - 1) + f_2' g_1'}{(1 - x f_1') (2y v g_2' - 1) + f_2' g_1'}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{g_1' [1 - (x + u) f_1']}{(1 - x f_1') (2y v g_2' - 1) + f_2' g_1'}$$

7.5 多元函数微分学的几何应用

要求: 会求空间曲线的切线与法平面及曲面的切平面与法线。

1、填空题

(1) 曲线 $x = \frac{t^4}{4}, y = \frac{t^3}{3}, z = \frac{t^2}{2}$ 在 $t=1$ 处的切线方程为 $x - \frac{1}{4} = y - \frac{1}{3} = z - \frac{1}{2}$

(2) 曲线 $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, z = 4 \sin \frac{t}{2}$ 在 $t = \frac{\pi}{2}$ 处的法平面方程为 $x + y + \sqrt{2}z - 4 = 0$

(3) 求旋转椭球面 $3x^2 + y^2 + z^2 = 16$ 上点 $M(-1, -2, 3)$ 处的切平面与 xoy 面的夹角的余弦 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{22}}$

(4) 曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 169$ 在点 $M(3, 4, 12)$ 的法线方程为 $\frac{x-3}{3} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-12}{12}$

2、求平行于平面 $x + 4y + 6z = 0$ 的曲面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ 的切平面方程。 M_0

解: 设切点 (x_0, y_0, z_0) , $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 21$

法向量: $\{F_x, F_y, F_z\}_{M_0} = \{2x_0, 4y_0, 6z_0\}$

切平面: $2x_0(x - x_0) + 4y_0(y - y_0) + 6z_0(z - z_0) = 0$

 $\therefore$ 该切平面平行于已知平面

$\therefore \frac{2x_0}{1} = \frac{4y_0}{4} = \frac{6z_0}{6}$, 又 $x_0^2 + 2y_0^2 + 3z_0^2 = 21$

$\therefore x_0 = \pm 1$, 切点 $(1, 2, 2), (-1, -2, -2)$

切平面方程: $x + 4y + 6z = \pm 21$

3、求曲线 $\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 + z^2 = 47 \\ x^2 + 2y^2 = z \end{cases}$ 在点 $M(-2, 1, 6)$ 处的切线方程。解: 方程组两边关于 x 求导

$$\begin{cases} 4x + 6y \cdot y' + 2z \cdot z' = 0 \\ 2x + 4y \cdot y' = z' \end{cases} \quad M \text{ 点处} \begin{cases} 6y' + 12z' = 8 \\ 4y' - z' = 4 \end{cases}$$

$\therefore y' = \frac{28}{27}, z' = \frac{4}{27}$, 切向量 $\{1, \frac{28}{27}, \frac{4}{27}\} = \frac{1}{27}\{27, 28, 4\}$

切线方程: $\frac{x+2}{27} = \frac{y-1}{28} = \frac{z-6}{4}$

4、设直线 $\begin{cases} x + y + b = 0 \\ x + ay - z - 3 = 0 \end{cases}$ 在平面 Σ 上, 而平面 Σ 与曲面 $z = x^2 + y^2$ 相切于点 $M(1, -2, 5)$, 求 a, b 之值。解: 设平面为: $x + y + b + \lambda(x + ay - z - 3) = 0$ [平面]

即: $(1+\lambda)x + (1+a\lambda)y - \lambda z + b - 3\lambda = 0$

曲面 $z = x^2 + y^2$ 在 $M(1, -2, 5)$ 处的法向量为

$\{2x, 2y, -1\}_M = \{2, -4, -1\}$

$\therefore \begin{cases} \frac{1+\lambda}{2} = \frac{1+a\lambda}{-4} = \frac{-1}{-1} \\ 1-2+b+\lambda(1-2a-5-3) = 0 \end{cases}$

解得: $a = -5, b = -2$

7.6 方向导数与梯度

要求: 理解方向导数与梯度的概念, 会求方向导数与梯度。

1. 填空题

- (1) 函数 $z = \ln(x+y)$ 在抛物线 $y^2 = 4x$ 上点 $M(1,2)$ 处, 沿着这抛物线在该点处偏向 x 轴正向的切线方向的方向导数为

$$\frac{\sqrt{2}}{3};$$

- (2) 函数 $u = \ln(x + \sqrt{y^2 + z^2})$ 在 A 点沿点 $A(1,0,1)$ 指向点

$B(3,-2,2)$ 方向的方向导数为 $\frac{1}{2}$;

- (3) 函数 $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ 在点 $M(1,2,-2)$ 处的梯度

$$\text{grad} u|_M = \frac{2}{9} \{1, 2, -2\}$$

2. 求函数 $z = 1 - (\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2})$ 在点 $M(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})$ 处沿曲线

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 在这点的内法线方向的方向导数。

$$\text{解: 令 } F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$$

$$M \text{ 处内法向量 } \vec{n} = \{F_x, F_y\}_M = \left\{-\frac{\sqrt{2}}{a}, -\frac{\sqrt{2}}{b}\right\}$$

$$\text{方向余弦: } \cos \alpha = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{a}}{\sqrt{\frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2}}}, \cos \beta = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{b}}{\sqrt{\frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2}}}$$

$$f_x|_M = -\frac{2x}{a^2}|_M = -\frac{\sqrt{2}}{a}, f_y|_M = -\frac{2y}{b^2}|_M = -\frac{\sqrt{2}}{b}$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial n}|_M = f_x \cos \alpha + f_y \cos \beta = \sqrt{\frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2}} = \frac{1}{ab} \sqrt{2(a^2 + b^2)}$$

3. 求函数 $u = x + y + z$ 在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上点 $M(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ 处沿球面在该点的外法线方向的方向导数。

$$\text{解: 令 } F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1,$$

$$M \text{ 处外法线 } \vec{n} = \{F_x, F_y, F_z\}_M = \{2x, 2y, 2z\}_M = \left\{\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right\}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} = \cos \beta = \cos \gamma$$

$$u_x = u_y = u_z = 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_M = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

4. 问函数 $u = xy^2z$ 在点 $P(1,-1,2)$ 处沿什么方向的方向导数最大? 并求此方向导数的最大值。

$$\text{解: } \text{grad} u|_P = \{u_x, u_y, u_z\}_P = \{y^2z, 2xy, xy^2\}_P = \{2, -4, 1\}$$

$$|\text{grad} u|_P| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{21}$$

$\therefore u$ 沿 $\frac{1}{\sqrt{21}}\{2, -4, 1\}$ 的方向导数最大, 最大值为 $\sqrt{21}$

7.7 多元函数的极值及其求法

要求：理解多元函数极值和条件极值的概念，会求二元函数的极值，会用拉格朗日乘数法求条件极值，会求简单多元函数的最大、最小值，会求解一些简单的最值应用题。

1、求函数 $f(x, y) = e^{2x}(x + y^2 + y)$ 的极值。

$$\text{解: } \begin{cases} f_x = 2e^{2x}(x + y^2 + y) + e^{2x} \\ = e^{2x}(2x + y^2 + y + 1) \\ f_y = e^{2x}(2y + 1) \end{cases}$$

$$\text{令 } f_x = 0, f_y = 0 \text{ 得唯一驻点} \\ M(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$$

$$f_{xx} = 2e^{2x}(2x + y^2 + y + 1) + e^{2x} \cdot 2 \\ = e^{2x}(4x + y^2 + 2y + 2)$$

$$f_{xy} = e^{2x}(2y + 1), f_{yy} = 2e^{2x}$$

$$\text{驻点 } M(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}), A = 2e^{-\frac{1}{2}}, B = 0, C = 2e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\because B^2 - AC = -4e^{-1} < 0, A > 0$$

$$\therefore f(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}} \text{ 为极大值}$$

2、求 $z = x^2y(4 - x - y)$ 在由直线 $x + y = 6$ 与两坐标轴围成闭区域 D 上的最大值，最小值。

详解见课件 P3 P32.

3、在已知的椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 内一切内接的长方体（各边分别平行坐标轴）中，求其体积最大者。

解：设 (x, y, z) 为内接长方体在第一卦限的顶点坐标，则

详解见课件 P5 P32.

4、抛物面 $z = x^2 + y^2$ 被平面 $x + y + z = 1$ 截成一椭圆，求原点到这椭圆的最长与最短距离。

解：设 $M(x, y, z)$ 为椭圆上一点，则它到原点的距离为：

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

原问题等价于求 d^2 的

最值在条件 $\begin{cases} 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1 \\ x + y + 1 = 1 \end{cases}$ 下的条件极值。

设 Lagrange 函数为

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1) + \mu(x + y + z - 1)$$

$$\text{令 } \begin{cases} F_x = 2x - 2\lambda x + \mu = 0 \\ F_y = 2y - 2\lambda y + \mu = 0 \end{cases} \text{ 解得}$$

$$\begin{cases} F_z = 2z + \mu = 0 \\ F_\lambda = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \text{ 可能极值点}$$

$$F_\mu = x + y + z - 1 = 0 \quad \text{为:}$$

$$F_\mu = x + y + z - 1 = 0 \Rightarrow M_1(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2})$$

$$M_2(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2})$$

$$d(M_1) = \sqrt{9-5\sqrt{3}} \quad d(M_2) = \sqrt{9+5\sqrt{3}}$$

最短距离 最长距离

7.8 总习题

1、填空题 $\frac{\partial u}{\partial x} = e^{xy} y^2 + e^{xy} \cdot 2y \cdot \frac{\partial y}{\partial x}$, $1 + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y^2 + xy \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$

(1) 设 $u = f(x, y, z) = e^x y z^2$, 其中 $z = z(x, y)$ 是由 $x + y + z +$

$xyz = 0$ 确定的隐函数, 则 $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(0,1,-1)} = \underline{1}$;

(2) 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $x^2 + y^2 = x \varphi(\frac{z}{y})$ 所确定, 其中函数

两也关于 y 求导: $2y = x \cdot \varphi'(\frac{z}{y}) \cdot (-\frac{z}{y^2} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y})$

φ 可微, 则 $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y^2}{x\varphi'(\frac{z}{y})} + \frac{1}{y}$;

(3) 设 $z = f(2x, \frac{x}{y})$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4f_{11} + \frac{2}{y}(f_{12} + f_{21}) + \frac{1}{y^2} f_{22}$

(4) 由曲线 $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 12 \\ z = 0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周得到的旋转曲面在

点 $M(0, \sqrt{3}, \sqrt{2})$ 处的指向外侧的单位法向量为 $\{0, \frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\}$

2、选择题 旋转曲面为 $\{(x^2 + z^2) + 2y^2 = 12 = f(x, y, z) = 0$

(1) 二元函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ 在点 $M(0, 0)$ 处 $\{0, \frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\}$ 在曲线 $\begin{cases} x = t \\ y = -t^2 \\ z = t^3 \end{cases}$ 上点 $M(1, 1, 1)$ 处的法平面方程是 (C)

(A) 连续, 偏导数存在

(B) 连续, 偏导数不存在

(C) 不连续, 偏导数存在

(D) 不连续, 偏导数不存在

(2) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3xy}{\sqrt{xy+1}-1} = \underline{\text{令 } x=xy, \text{ 则 } 1 + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y^2 + xy \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0}$ (B)

(A) 3

(B) 6

(C) 不存在

(D) ∞

(3) 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 处可微, 下列结论不正确的是 (D)

(A) $f(x, y)$ 在点 (x, y) 连续

(B) $f(x, y)$ 在点 (x, y) 某邻域内有界

(C) $f(x, y)$ 在点 (x, y) 处两个偏导数 $f'_x(x, y)$ 与 $f'_y(x, y)$ 都存在

(D) $f(x, y)$ 在点 (x, y) 处两个偏导数 $f'_x(x, y)$ 与 $f'_y(x, y)$ 都连续

(4) 曲线 $\begin{cases} x = y^2 \\ z = x^2 \end{cases}$ 上点 $M(1, 1, 1)$ 处的法平面方程是 (C)

(A) $2x - y - 4z + 3 = 0$

(B) $2x - y + 4z - 5 = 0$

(C) $2x + y + 4z - 7 = 0$

(D) $y - 2x - 4z - 5 = 0$

(5) 设 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处取得极大值, 则函数

$\varphi(x) = f(x, y_0)$ 在 x_0 处与函数 $\psi(y) = f(x_0, y)$ 在 y_0 处 (A)

(A) 一定都取得极大值

(B) 恰有一个取得极大值

(C) 至多有一个极大值

(D) 都不能取得极大值

(6) 在曲线 $\begin{cases} x = t \\ y = -t^2 \\ z = t^3 \end{cases}$ 的所有切线中与平面 $x + 2y + z = 4$ 平行的 (A)

(A) 有一条

(B) 有两条

(C) 至少有 3 条

(D) 不存在

3. 设 $z = f(xy, e^{xy}) + \varphi(x+y)$, 其中 f, φ 具有二阶连续导数, 求

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \text{ 和 } dz.$$

$$\text{解: } dz = df + d\varphi$$

$$= f_1 d(xy) + f_2 de^{xy} + \varphi'(x+y)$$

$$= f_1 (y dx + x dy) + f_2 e^{xy} (y dx + x dy) + \varphi'(x+y)$$

$$= (y f_1 + y e^{xy} f_2 + \varphi') dx + (x f_1 + x e^{xy} f_2 + \varphi') dy$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = y f_{11} + y e^{xy} f_{12} + y e^{xy} f_{21} + y e^{xy} f_{22} + \varphi''$$

$$= y f_1 + y e^{xy} f_2 + \varphi'$$

$$+ (x f_1 + x e^{xy} f_2 + \varphi') dy$$

$$= f_1 + y f_{11} + y e^{xy} f_{12} + y e^{xy} f_{21} + y e^{xy} f_{22} + \varphi''$$

$$= f_1 + y f_{11} + y e^{xy} f_{12} + y e^{xy} f_{21} + y e^{xy} f_{22} + \varphi''$$

$$= f_1 + y f_{11} + y e^{xy} f_{12} + y e^{xy} f_{21} + y e^{xy} f_{22} + \varphi''$$

$$= f_1 + y f_{11} + y e^{xy} f_{12} + y e^{xy} f_{21} + y e^{xy} f_{22} + \varphi''$$

$$= f_1 + y f_{11} + y e^{xy} f_{12} + y e^{xy} f_{21} + y e^{xy} f_{22} + \varphi''$$

$$= f_1 + y f_{11} + y e^{xy} f_{12} + y e^{xy} f_{21} + y e^{xy} f_{22} + \varphi''$$

$$= f_1 + y f_{11} + y e^{xy} f_{12} + y e^{xy} f_{21} + y e^{xy} f_{22} + \varphi''$$

$$= f_1 + y f_{11} + y e^{xy} f_{12} + y e^{xy} f_{21} + y e^{xy} f_{22} + \varphi''$$

$$= f_1 + y f_{11} + y e^{xy} f_{12} + y e^{xy} f_{21} + y e^{xy} f_{22} + \varphi''$$

$$= f_1 + y f_{11} + y e^{xy} f_{12} + y e^{xy} f_{21} + y e^{xy} f_{22} + \varphi''$$

$$= f_1 + y f_{11} + y e^{xy} f_{12} + y e^{xy} f_{21} + y e^{xy} f_{22} + \varphi''$$

$$= f_1 + y f_{11} + y e^{xy} f_{12} + y e^{xy} f_{21} + y e^{xy} f_{22} + \varphi''$$

5. 设 $y = f(x, t)$, 而 t 是由方程 $F(x, y, t) = 0$ 所确定的 x, y 的函数,

其中 f, F 都具有二阶连续偏导数, 试证明 $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial t}}$.

解法 I 两边求微分得

$$dy = f_1 dx + f_2 dt$$

$$F_1 dx + F_2 dy + F_3 dt = 0$$

$$F_1 dx + F_2 dy + F_3 dt = 0$$

$$F_1 dx + F_2 dy + F_3 dt = 0$$

$$F_1 dx + F_2 dy + F_3 dt = 0$$

$$F_1 dx + F_2 dy + F_3 dt = 0$$

$$F_1 dx + F_2 dy + F_3 dt = 0$$

$$F_1 dx + F_2 dy + F_3 dt = 0$$

$$F_1 dx + F_2 dy + F_3 dt = 0$$

$$F_1 dx + F_2 dy + F_3 dt = 0$$

$$F_1 dx + F_2 dy + F_3 dt = 0$$

$$F_1 dx + F_2 dy + F_3 dt = 0$$

$$F_1 dx + F_2 dy + F_3 dt = 0$$

$$F_1 dx + F_2 dy + F_3 dt = 0$$

$$F_1 dx + F_2 dy + F_3 dt = 0$$

$$F_1 dx + F_2 dy + F_3 dt = 0$$

$$F_1 dx + F_2 dy + F_3 dt = 0$$

$$F_1 dx + F_2 dy + F_3 dt = 0$$

解法 II 两边求微分得

$$\frac{dy}{dx} = f_1 + f_2 \frac{dt}{dx}$$

$$F_1 + F_2 \frac{dt}{dx} + F_3 \frac{dt}{dx} = 0$$

$$F_1 + F_2 \frac{dt}{dx} + F_3 \frac{dt}{dx} = 0$$

$$F_1 + F_2 \frac{dt}{dx} + F_3 \frac{dt}{dx} = 0$$

$$F_1 + F_2 \frac{dt}{dx} + F_3 \frac{dt}{dx} = 0$$

$$F_1 + F_2 \frac{dt}{dx} + F_3 \frac{dt}{dx} = 0$$

$$F_1 + F_2 \frac{dt}{dx} + F_3 \frac{dt}{dx} = 0$$

$$F_1 + F_2 \frac{dt}{dx} + F_3 \frac{dt}{dx} = 0$$

$$F_1 + F_2 \frac{dt}{dx} + F_3 \frac{dt}{dx} = 0$$

$$F_1 + F_2 \frac{dt}{dx} + F_3 \frac{dt}{dx} = 0$$

$$F_1 + F_2 \frac{dt}{dx} + F_3 \frac{dt}{dx} = 0$$

$$F_1 + F_2 \frac{dt}{dx} + F_3 \frac{dt}{dx} = 0$$

$$F_1 + F_2 \frac{dt}{dx} + F_3 \frac{dt}{dx} = 0$$

$$F_1 + F_2 \frac{dt}{dx} + F_3 \frac{dt}{dx} = 0$$

$$F_1 + F_2 \frac{dt}{dx} + F_3 \frac{dt}{dx} = 0$$

$$F_1 + F_2 \frac{dt}{dx} + F_3 \frac{dt}{dx} = 0$$

$$F_1 + F_2 \frac{dt}{dx} + F_3 \frac{dt}{dx} = 0$$

$$F_1 + F_2 \frac{dt}{dx} + F_3 \frac{dt}{dx} = 0$$

4. 设 $\begin{cases} xy^2 - uv = 1 \\ x^2 + y^2 - u + v = 0 \end{cases}$, $w = e^{u+v}$, 其中 u, v 是由上式确定的

的 x, y 的函数, 求 $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}$.

解: 对 $\begin{cases} xy^2 - uv = 1 \\ x^2 + y^2 - u + v = 0 \end{cases}$ 求微分得

$$\begin{cases} y^2 - (v \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial x}) = 0 \\ 2x - \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2xy - (v \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial v}{\partial y}) = 0 \\ 2y - \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2xy - (v \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial v}{\partial y}) = 0 \\ 2y - \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2xy - (v \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial v}{\partial y}) = 0 \\ 2y - \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2xy - (v \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial v}{\partial y}) = 0 \\ 2y - \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2xy - (v \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial v}{\partial y}) = 0 \\ 2y - \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2xy - (v \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial v}{\partial y}) = 0 \\ 2y - \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2xy - (v \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial v}{\partial y}) = 0 \\ 2y - \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2xy - (v \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial v}{\partial y}) = 0 \\ 2y - \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

6. 设 $u = f(r), r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 在 $r > 0$ 满足 Laplace 方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \text{ 其中 } f(r) \text{ 二阶可导, 且 } f(1) = f'(1) = 1,$$

试将 Laplace 方程化为以 r 为自变量的常微分方程, 并求 $f(r)$.

$$\text{解: } \frac{\partial u}{\partial x} = f'(r) \cdot \frac{x}{r} = f'(r) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(r) \cdot \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{r} \cdot f'(r)$$

$$= f''(r) \cdot \frac{x^2}{r^2} + \frac{1}{r^3} \cdot f'(r)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f''(r) \cdot \frac{y^2}{r^2} + \frac{1}{r^3} \cdot f'(r)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f''(r) \cdot \frac{z^2}{r^2} + \frac{1}{r^3} \cdot f'(r)$$

$$\text{由 Laplace 方程得:}$$

$$f''(r) \cdot \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2} + \frac{3}{r^3} \cdot f'(r) = 0$$

$$f''(r) + \frac{3}{r} f'(r) = 0$$

$$\text{令 } f'(r) = p(r), \text{ 则 } p' + \frac{3}{r} p = 0$$

$$p = C_1 e^{-\int \frac{3}{r} dr} = C_1 r^{-3}$$

$$f(r) = -\frac{C_1}{2} r^{-2} + C_2$$

$$\text{由 } f(1) = f'(1) = 1 \text{ 得 } C_1 = 1, C_2 = 2$$

$$\therefore f(r) = 2 - \frac{1}{2r^2}$$

第8章 重积分

8.1 重积分的概念与性质

要求: 理解二重积分、三重积分的概念, 了解重积分的性质。

1、设 $I_1 = \iint_{D_1} (x^2 + y^2) d\sigma$, 其中 $D_1 = \{(x, y) | -1 \leq x \leq 1,$

$-2 \leq y \leq 2\}$; $I_2 = \iint_{D_2} (x^2 + y^2) d\sigma$, 其中 $D_2 = \{(x, y) |$

$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$, 试利用二重积分的几何意义说明 I_1 与 I_2 之间的关系。

解: $z = x^2 + y^2$ 曲面关于 zOx 面对称, 且关于 zOy 面对称

而 D_1 积分区域关于 x 轴对称, 且关于 y 轴对称

$\therefore I_1$ 曲顶柱体的体积为第一卦限部分的4倍

即 $I_1 = 4I_2$

2、根据重积分性质比较下列积分的大小

(1) $\iint_D \ln(x+y) dx dy$ 与 $\iint_D [\ln(x+y)]^2 dx dy$, 其中

$D = \{(x, y) | 3 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 1\}$

解: $\because 3 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 1, \therefore x+y \geq 3$

$\therefore \ln(x+y) \geq \ln 3 > \ln e = 1$

$\therefore \ln(x+y) < [\ln(x+y)]^2$

$\therefore \iint_D \ln(x+y) dx dy < \iint_D [\ln(x+y)]^2 dx dy$

(2) $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2)^2 dv$ 与 $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv$, 其中

Ω 是由球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 所围成的闭区域。

解: 在 Ω 内有 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$

$\therefore (x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq x^2 + y^2 + z^2$

$\therefore \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2)^2 dv \leq \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv$

(也可写“ $<$ ”)

3、利用重积分性质估计下列积分值

(1) $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$:

解: 先求 $f(x, y) = x^2 + 4y^2 + 9$ 在 D 上的最值。

由 $f_x = 2x = 0, f_y = 8y = 0$ 得驻点 $(0, 0), f(0, 0) = 9$

在 D 的边界上 令 $x = 2\cos\theta, y = 2\sin\theta, \theta \in [0, 2\pi]$

$1) f(x, y) = 4\cos^2\theta + 16\sin^2\theta + 9 = 13 + 12\sin^2\theta \leq 25$

$\therefore$ 在 D 上 $f_{\max} = 25, f_{\min} = 9$ 而 $\sigma = 4\pi, \therefore 36\pi \leq I \leq 100\pi$

(2) $I = \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - 1 dv$, 其中 $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$

解: 在 Ω 上 $0 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$

$\therefore -1 \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - 1 \leq 1$

$-1 \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - 1 \leq \sqrt{3}$

又 $\because V = \frac{4}{3}\pi \cdot 2^3 = \frac{32}{3}\pi$

$\therefore -\frac{32}{3}\pi \leq I \leq \frac{32}{3}\sqrt{3}\pi$

加南邮校园墙领各科期末考试资料002966503201

7. 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{9}{4}$ 与椭球面 $3x^2 + (y-1)^2 + z^2 = \frac{17}{4}$ 交线

上对应于 $x=1$ 点处的切线方程和法平面方程。

解: 方程两边关于 x 求导得:

$$\begin{cases} 2x + 2y \frac{dy}{dx} + 2z \frac{dz}{dx} = 0 \\ 6x + 2(y-1) \frac{dy}{dx} + 2z \frac{dz}{dx} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 2y \frac{dy}{dx} + 2z \frac{dz}{dx} = 0 \\ 6x + 2(y-1) \frac{dy}{dx} + 2z \frac{dz}{dx} = 0 \end{cases}$$

解得 $\frac{dy}{dx} = 2x, \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{x}$

由 $x=1$ 有切点处 $y=\frac{1}{2}, z=\pm 1$

切点 $(1, \frac{1}{2}, \pm 1)$

8. 已知曲面 $S: \frac{x^2}{2} + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$, 平面 $\Sigma: 2x + 2y + z + 5 = 0$

(1) 试在曲面 S 上求平行于平面 Σ 的切平面方程;

(2) 试求曲面 S 与平面 Σ 之间的最短距离。

解: (1) 设切点为 (x_0, y_0, z_0)

则法向量 $\{F_x, F_y, F_z\}_{M_0}$

$$= \{x_0, 2y_0, \frac{1}{2}z_0\}$$

而 Σ 的法向量为 $\{2, 2, 1\}$

$$\therefore \begin{cases} \frac{x_0}{2} = \frac{y_0}{2} = \frac{z_0}{1} \\ \frac{x_0^2}{2} + y_0^2 + \frac{z_0^2}{4} = 1 \end{cases}$$

解得 $x_0 = \pm 1, y_0 = \pm \frac{1}{2}, z_0 = \pm 1$

x_0, y_0, z_0 同号

$(1, \frac{1}{2}, 1)$ 处

$$\text{切线: } \frac{x-1}{1} = \frac{y-\frac{1}{2}}{2} = \frac{z-1}{-1}$$

$$\text{法平面: } (x-1) + 2(y-\frac{1}{2}) - (z-1) = 0$$

$$\text{即: } x + 2y - z = 0$$

$(1, \frac{1}{2}, -1)$ 处

$$\text{切线: } \frac{x-1}{1} = \frac{y-\frac{1}{2}}{2} = \frac{z+1}{1}$$

$$\text{法平面: } (x-1) + 2(y-\frac{1}{2}) + (z+1) = 0$$

$$\text{即: } x + 2y + z = 0$$

$\therefore$ 切平面方程为

$$2(x \pm 1) + 2(y \pm \frac{1}{2}) + (z \pm 1) = 0$$

$$\text{即 } 2x + 2y + z \pm 4 = 0$$

(2) S 到 Σ 的最短距离

为某一切点到 Σ 的距离

$$\frac{|2+1+1+5|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{9}{3} = 3$$

$$\frac{|-2-1-1+5|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{1}{3}$$

$\therefore$ 最短距离为 $\frac{1}{3}$

9. 求 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x^2y^2$ 在区域 $D: x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0$

的最大值和最小值。

解: ① 先求 f 在 D 内部驻点

$$\begin{cases} f'_x = 2x - 2xy^2 = 0 \\ f'_y = 4y - 2x^2y = 0 \end{cases}$$

$$\text{得驻点 } (\pm 2, 1)$$

$$f(\pm 2, 1) = 2$$

② 边界 $y=0, x \in [-2, 2]$ 上

$$f(x, 0) = x^2, x \in [-2, 2]$$

最大 $f(\pm 2, 0) = 4$, 最小 $f(0, 0) = 0$

③ 边界 $x^2 + y^2 = 4, y \geq 0$ 上

$$\text{令 } F(x, y, \lambda) = x^2 + 2y^2 - x^2y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 4)$$

$$\begin{cases} F_x = 2x - 2xy^2 + 2\lambda x = 0 \\ F_y = 4y - 2x^2y + 2\lambda y = 0 \\ F_\lambda = x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{得 } (\pm \sqrt{2}, \sqrt{2}), (0, 2)$$

$$f(\pm \sqrt{2}, \sqrt{2}) = \frac{7}{4}, f(0, 2) = 8$$

$\therefore$ 最大值为 8, 最小值为 0

第8章 重积分

姓名

班级

学号

8.2.2 利用极坐标计算二重积分

1、填空题 (化下列二次积分为极坐标形式的二次积分)

(1) $\int_0^{2R} dy \int_0^{\sqrt{2Ry-y^2}} f(x,y) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2R\sin\theta} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \rho d\rho$

(2) $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y) dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \rho d\rho$

(3) $\int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} (x^2+y^2) dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R \rho^3 d\rho$

(4) $\int_0^R \frac{R}{\sqrt{1+R^2}} dx \int_0^{Rx} f\left(\frac{y}{x}\right) dy + \int_{\frac{R}{\sqrt{1+R^2}}}^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f\left(\frac{y}{x}\right) dy = \int_0^{\arctan R} d\theta \int_0^R f(\tan\theta) \rho d\rho$

2、利用极坐标计算下列各题

(1) $\iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2} \cdot \sqrt{4-(x^2+y^2)}}$, 其中 $D: 1 \leq x^2+y^2 \leq 2$

解: $D: \begin{cases} 1 \leq \rho \leq \sqrt{2} \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^{\sqrt{2}} \frac{\rho d\rho}{\rho \sqrt{4-\rho^2}} = 2\pi \cdot \arcsin \frac{\rho}{2} \Big|_1^{\sqrt{2}}$$

$$= 2\pi \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{6}$$

(2) $\iint_D (x+y) d\sigma$, 其中 $D: x^2+y^2-2Rx \leq 0$

解: $D: \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \rho \leq 2R\cos\theta \end{cases}$

$$I = \iint_D x d\sigma + \iint_D y d\sigma = \iint_D x d\sigma = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2R\cos\theta} \rho \cos\theta \rho d\rho$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \cos\theta \cdot \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^{2R\cos\theta} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{8}{3} R^3 \cos^4\theta d\theta = 2 \cdot \frac{8}{3} R^3 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

(3) $\iint_D \ln(1+x^2+y^2) d\sigma$, 其中 $D: x^2+y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$

解: $D: \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \rho \leq 1 \end{cases}$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \ln(1+\rho^2) \rho d\rho = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \ln(1+\rho^2) d\frac{\rho^2}{2}$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[\frac{\rho^2}{2} \ln(1+\rho^2) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\rho^2}{2} \cdot \frac{d\rho^2}{1+\rho^2} \right] = \frac{\pi}{4} [2\ln 2 - 1]$$

3、求球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 和柱面 $x^2+y^2=2x$ 所包围的且在柱面内部的体积。

解: $D: \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \rho \leq 2\cos\theta \end{cases}$

由对称性得:

$$V = 2 \iint_D \sqrt{4-x^2-y^2} d\sigma = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} \sqrt{4-\rho^2} \rho d\rho$$

$$= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{1}{3} (4-\rho^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{2\cos\theta} d\theta$$

$$= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{8}{3} (1-\sin^2\theta) d\theta = \frac{16}{3} (\pi - 4)$$

8.3 三重积分

要求: 熟练掌握三重积分的计算法(直角坐标、柱面坐标、球面坐标)。

8.3.1 直角坐标系下三重积分的计算法

1、填空题(化三重积分 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ 为三次积分)

(1) Ω : 由曲面 $xy = z$ 及平面 $x + y - 1 = 0, z = 0$ 所围成的闭区域,

$$\text{则 } \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{xy} f(x, y, z) dz$$

(2) Ω : 由曲面 $x^2 + y^2 = 4$ 及平面 $z = 0, z = x + y + 10$ 所围成的

$$\text{闭区域, 则 } \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy \int_0^{x+y+10} f(x, y, z) dz$$

(3) Ω : 由曲面 $3x^2 + y^2 = z$ 及 $z = 1 - x^2$ 所围成的闭区域,

$$\text{则 } \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx \int_{-\sqrt{1-4x^2}}^{\sqrt{1-4x^2}} dy \int_{x^2+y^2}^{1-x^2} f(x, y, z) dz$$

2、计算下列三重积分

(1) $\iiint_{\Omega} (x + y + z)^2 dv$, 其中 $\Omega: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$;

$$\begin{aligned} \text{解: } I &= \iiint_{\Omega} (x^2 + 2xy + y^2 + 2xz + 2yz + z^2) dv \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x^2 + 2xy + y^2 + 2xz + 2yz + z^2) dz dy dx \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^1 \left(x^2 z + 2xy z + y^2 z + 2xz^2 + 2yz^2 + z^3 \right) dy \right] dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \right] dx = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

(2) $\iiint_{\Omega} xz dx dy dz$, 其中 Ω 是由平面 $z = 0, y = z, y = 1$ 以及抛

物柱面 $y = x^2$ 所围成的闭区域

解: 因为 Ω 关于 yoz 面对称, $f(x, y, z) = xz$ 关于

x 为奇函数

$$\therefore I = 0$$

(3) $\iiint_{\Omega} z dv$, 其中 Ω 是 $z = x^2 + y^2$ 及 $z = 6$ 所围的区域;

$$\begin{aligned} \text{解: } I &= \iint_{x^2+y^2 \leq 6} dxdy \int_{x^2+y^2}^6 z dz \quad \text{或 } I = \int_0^6 dz \iint_{x^2+y^2 \leq z} z dxdy = \int_0^6 z \cdot \pi z dz \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq 6} \left(18 - \frac{x^2+y^2}{2} \right) dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{6}} \left(18 - \frac{\rho^2}{2} \right) \rho d\rho \\ &= 2\pi \cdot \left[9\rho^2 - \frac{\rho^4}{4} \right]_0^{\sqrt{6}} = 72\pi \end{aligned}$$

3. $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上连续, 证明:

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} f(x) dx dy dz = \pi \int_{-1}^1 f(x)(1-x^2) dx$$

证: 由切片法

$$\begin{aligned} \text{左边} &= \int_{-1}^1 dx \iint_{y^2+z^2 \leq 1-x^2} f(x) dy dz \\ &= \int_{-1}^1 f(x) \cdot \pi \cdot (1-x^2) dx \\ &= \text{右边} \end{aligned}$$

8.3 三重积分

要求: 熟练掌握三重积分的计算法(直角坐标、柱面坐标、球面坐标)。

8.3.1 直角坐标系下三重积分的计算法

1、填空题(化三重积分 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ 为三次积分)

(1) Ω : 由曲面 $xy = z$ 及平面 $x + y - 1 = 0, z = 0$ 所围成的闭区域,

$$\text{则 } \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{xy} f(x, y, z) dz$$

(2) Ω : 由曲面 $x^2 + y^2 = 4$ 及平面 $z = 0, z = x + y + 10$ 所围成的

$$\text{闭区域, 则 } \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy \int_0^{x+y+10} f(x, y, z) dz$$

(3) Ω : 由曲面 $3x^2 + y^2 = z$ 及 $z = 1 - x^2$ 所围成的闭区域,

$$\text{则 } \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx \int_{-\sqrt{1-4x^2}}^{\sqrt{1-4x^2}} dy \int_{x^2+y^2}^{1-x^2} f(x, y, z) dz$$

2、计算下列三重积分

(1) $\iiint_{\Omega} (x + y + z)^2 dv$, 其中 $\Omega: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$;

$$\begin{aligned} \text{解: } I &= \iiint_{\Omega} (x^2 + 2xy + y^2 + 2xz + 2yz + z^2) dv \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x^2 + 2xy + y^2 + 2xz + 2yz + z^2) dz dy dx \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^1 \left(x^2 z + 2xy z + \frac{1}{2} y^2 z + x^2 z + 2yz + \frac{1}{3} z^3 \right) dy \right] dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \right] dx = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

(2) $\iiint_{\Omega} xz dx dy dz$, 其中 Ω 是由平面 $z = 0, y = z, y = 1$ 以及抛

物柱面 $y = x^2$ 所围成的闭区域

解: 因为 Ω 关于 yz 面对称, $f(x, y, z) = xz$ 关于

x 为奇函数

$$\therefore I = 0$$

(3) $\iiint_{\Omega} z dv$, 其中 Ω 是 $z = x^2 + y^2$ 及 $z = 6$ 所围的区域;

$$\begin{aligned} \text{解: } I &= \iint_{x^2+y^2 \leq 6} dxdy \int_{x^2+y^2}^6 z dz \quad \text{或 } I = \int_0^6 dz \iint_{x^2+y^2 \leq z} z dxdy = \int_0^6 z \cdot \pi z dz \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq 6} \left(18 - \frac{x^2+y^2}{2} \right) dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{6}} \left(18 - \frac{\rho^2}{2} \right) \rho d\rho \\ &= 2\pi \cdot \left[9\rho^2 - \frac{\rho^4}{12} \right]_0^{\sqrt{6}} = 72\pi \end{aligned}$$

3. $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上连续, 证明:

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} f(x) dx dy dz = \pi \int_{-1}^1 f(x)(1-x^2) dx$$

证: 由切片法

$$\begin{aligned} \text{左边} &= \int_{-1}^1 dx \iint_{y^2+z^2 \leq 1-x^2} f(x) dy dz \\ &= \int_{-1}^1 f(x) \cdot \pi \cdot (1-x^2) dx \\ &= \text{右边} \end{aligned}$$

第8章 重积分

姓名

班级

学号

8.3.2 柱面坐标系下三重积分的计算法

1、填空题

(在柱面坐标系下化三重积分 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ 为三次积分)(1) Ω : 由曲面 $z = \sqrt{4-x^2-y^2}$ 及 $3z = x^2+y^2$ 所围成的闭区域,则 $\iiint_{\Omega} f(x^2+y^2) dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} \rho d\rho \int_{\rho^2/3}^{\sqrt{4-\rho^2}} f(\rho^2) dz$ (2) Ω : 由曲面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=1, z=0, x=0, y=0$ 所围成的在第一卦限内的闭区域, 则 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz =$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \rho d\rho \int_0^1 f(\rho \cos\theta, \rho \sin\theta, 1) dz.$$

2、利用柱面坐标计算下列三重积分

(1) $\iiint_{\Omega} (x^2+y^2) dv$, 其中 Ω 是 $4z^2 = 25(x^2+y^2)$ 及 $z=5$ 所围

的区域:

$$\text{解: } \begin{cases} 4z^2 = 25(x^2+y^2) \\ z=5 \end{cases} \Rightarrow D_{xy}: x^2+y^2 \leq 4$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho d\rho \int_{\frac{5}{2}\rho}^5 \rho^2 dz \\ &= 2\pi \int_0^2 \rho^3 (5 - \frac{5}{2}\rho) d\rho \\ &= 2\pi (5 \cdot \frac{\rho^4}{4} - \frac{1}{2} \rho^5) \Big|_0^2 \\ &= 8\pi. \end{aligned}$$

(2) $\iiint_{\Omega} z dv$, 其中 Ω 是 $z = x^2+y^2$ 及 $z = \sqrt{2-x^2-y^2}$ 所围区域:

$$\text{解: } \begin{cases} z = x^2+y^2 \\ z = \sqrt{2-x^2-y^2} \end{cases} \Rightarrow D_{xy}: x^2+y^2 \leq 1$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho \int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}} \rho^2 dz = 2\pi \cdot \int_0^1 \rho \cdot \frac{1}{2} (\sqrt{2-\rho^2} - \rho^2) d\rho \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{2} (2\rho - \rho^3 - \rho^5) \right) \Big|_0^1 = 2\pi \cdot \frac{1}{2} (2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{6}) = \frac{7}{12} \pi \end{aligned}$$

(3) $\iiint_{\Omega} (x^2+y^2) dv$, 其中 Ω 是 $2z = x^2+y^2$ 及 $z=2, z=8$ 所围

的区域.

$$\text{解: } \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2, \quad \Omega_1: \begin{cases} 0 \leq x^2+y^2 \leq 4 \\ 2 \leq z \leq 8 \end{cases}, \quad \Omega_2: \begin{cases} 4 \leq x^2+y^2 \leq 16 \\ \frac{x^2+y^2}{2} \leq z \leq 8 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho d\rho \int_2^8 \rho^2 dz + \int_0^{2\pi} d\theta \int_2^4 \rho d\rho \int_{\frac{\rho^2}{2}}^8 \rho^2 dz \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{4} \rho^4 \Big|_0^2 \cdot 6 + 2\pi \cdot \int_2^4 \rho^3 (8 - \frac{\rho^2}{2}) d\rho \\ &= 48\pi + 2\pi (2\rho^4 - \frac{1}{12} \rho^6) \Big|_2^4 = 336\pi \end{aligned}$$

3、利用三重积分计算 $z = 6-x^2-y^2$ 和 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ 所围成的立体的体积.

$$\begin{aligned} \text{解: } V &= \iiint_{\Omega} dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho d\rho \int_{\rho}^{6-\rho^2} \rho dz \\ &= 2\pi \cdot \int_0^2 \rho (6 - \rho^2 - \rho) d\rho \\ &= 2\pi \left(3\rho^2 - \frac{1}{4}\rho^4 - \frac{1}{2}\rho^3 \right) \Big|_0^2 \\ &= 32\pi/3. \end{aligned}$$

8.3.3 球面坐标系下三重积分的计算法

1、填空题

(在球面坐标系下化三重积分 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ 为三次积分)(1) Ω : 由曲面 $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$ 及 $x^2 + y^2 = z^2$ 所围成的闭区域, 则 $\iiint_{\Omega} f(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{4\cos\varphi} f(r^2) r^2 \sin\varphi dr$ (2) 设 Ω : $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0$, 则 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 f(r \sin\varphi \cos\theta, r \sin\varphi \sin\theta, r \cos\varphi) r^2 \sin\varphi dr$

2、利用球面坐标计算下列三重积分

(1) $\iiint_{\Omega} (x+z) dv$, 其中 Ω 是 $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ 与 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ 所围的区域: 由 $2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 r \cos\varphi \cdot r^2 \sin\varphi dr d\varphi = 0$

$$\begin{aligned} \text{解: } I &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^1 r \cos\varphi \cdot r^2 \sin\varphi dr \\ &= 2\pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\varphi \cdot \sin\varphi d\varphi \cdot \int_0^1 r^3 dr \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{2} \sin^2\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{r^4}{4} \Big|_0^1 \\ &= \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

(2) $\iiint_{\Omega} (x+y+z)^2 dv$, 其中 Ω 是 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 的球体:

$$\begin{aligned} \text{解: } I &= \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx) dv \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^R r^2 \cdot r^2 \sin\varphi dr \\ &= 2\pi \cdot (\cos\varphi) \Big|_0^{\pi} \cdot \frac{r^5}{5} \Big|_0^R \\ &= \frac{4}{5} \pi R^5 \end{aligned}$$

(3) $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv$, 其中 Ω : $2 \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq 4, z \geq 0$.

$$\begin{aligned} \text{解: } I &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_2^4 r^2 \sin^2\varphi r^2 \sin\varphi dr \\ &= 2\pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi d\varphi \int_2^4 r^4 dr \\ &= 2\pi \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot \frac{r^5}{5} \Big|_2^4 = \frac{3468}{15} \pi \end{aligned}$$

(4) $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dv$, 其中 Ω 是 $x^2 + y^2 + z^2 = z$ 所围的区域.

$$\begin{aligned} \text{解: } I &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\cos\varphi} r \cdot r^2 \sin\varphi dr \\ &= 2\pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} \cos^4\varphi \cdot \sin\varphi d\varphi \\ &= 2\pi \cdot \left(-\frac{1}{20} \cos^5\varphi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{10} \end{aligned}$$

8.4 重积分的应用

要求: 掌握重积分在几何学和物理学中的应用(面积、体积、质量、重心、转动惯量)。

1、求锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被抛物柱面 $z^2 = 2x$ 所割下部分的面积。

解: 投影: $x^2 + y^2 \leq 2x$

$$\begin{aligned} S &= \iint_D \sqrt{1+x^2+y^2} \, d\sigma \\ &= \iint_D \sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2} \, d\sigma \\ &= \sqrt{2} \cdot \sigma_D = \sqrt{2}\pi \end{aligned}$$

2、已知球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz$ ($R > 0$), 其上任一点的密度在数量上等于该点到原点的距离的平方, 试求这个球体的质心。

解: $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

$$M = \iiint_{\Omega} \rho \, dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2R\cos\varphi} r^2 \cdot r^2 \sin\varphi \, dr = \frac{32}{15}\pi R^5$$

$$\bar{x} = \iiint_{\Omega} x \rho \, dv / M = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2R\cos\varphi} r^5 \cos\varphi \sin\varphi \, dr / M = 0$$

$$\bar{y} = \iiint_{\Omega} y \rho \, dv / M = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2R\cos\varphi} r^5 \sin\varphi \cos\varphi \, dr / M = 0$$

$$\bar{z} = \iiint_{\Omega} z \rho \, dv / M = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2R\cos\varphi} r^5 \sin\varphi \, dr / M = \frac{5}{4}R$$

质心 $(0, 0, \frac{5}{4}R)$

3、设薄片所占的闭区域 $D: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, y \geq 0$, 求均匀薄片的

质心。

解: 由对称性 $\bar{x} = 0$, 设密度 μ

$$M = \mu \iint_D d\sigma = \frac{\mu}{2} \pi ab$$

$$\bar{y} = \mu \iint_D y \, d\sigma / M = \mu \int_{-a}^a dx \int_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} y \, dy / M = \frac{4b}{3\pi}$$

4、设均匀薄片(面密度 $\mu = 1$)所占的闭区域 D 由抛物线 $y^2 = \frac{9}{2}x$ 与直线 $x = 2$ 所围成, 求其对 y 轴的转动惯量 I_y 。

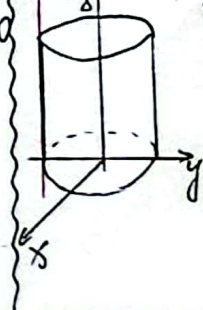
$$\begin{aligned} \text{解: } I_y &= \iint_D x^2 \, d\sigma = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int_{\frac{2}{9}y^2}^2 x^2 \, dx \\ &= 2 \int_0^{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{\frac{2}{9}y^2}^2 dy \\ &= 96/7 \end{aligned}$$

5、已知均匀圆柱体的底半径为 R , 高为 H , 求其对母线的转动惯量。

解: 建立如图所系坐标系, 则 $\Omega: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq R^2 \\ 0 \leq z \leq H \end{cases}$

设母线 $\Gamma: x=0, y=R$

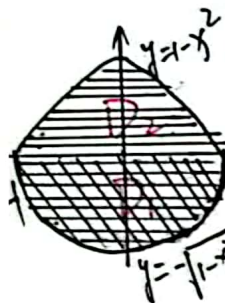
则 Γ 的转动惯量(设密度为 μ)



$$\begin{aligned} I &= \mu \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + R^2) \, dv \\ &= \mu \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho \, d\rho \int_0^H (R^2 + \rho^2) \, dz \\ &= \frac{3}{2}\pi \mu H R^4 \end{aligned}$$

8.5 总习题

1. 填空题



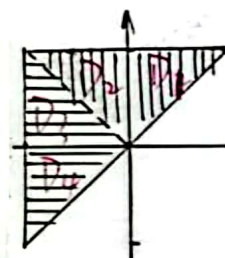
(1) 设 $D: x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0$, 则 $\iint_D (x + x^3 y^2) dx dy = 0$;

交换下列二次积分的积分次序:

$$(2) \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y) dy = \int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx + \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$$

2. 选择题

(1) 设有平面闭区域 $D = \{(x, y) | -a \leq x \leq a, x \leq y \leq a\}$,



$D_1 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq a, x \leq y \leq a\}$, 则 $\iint_D (xy + \cos x \sin y) dx dy =$

(A) $2 \iint_{D_1} \cos x \sin y dx dy$ (B) $2 \iint_{D_1} xy dx dy$ (C) $4 \iint_{D_1} (xy + \cos x \sin y) dx dy$ (D) 0

(2) 设 D 为 $x^2 + y^2 \leq a^2$, 且 $\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy = \pi$, 则 $a =$

$$\frac{2\pi}{3} a^3 = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a \sqrt{a^2 - \rho^2} \rho d\rho d\theta = \frac{2\pi}{3} a^3 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

(A) 1 (B) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ (C) $\sqrt{\frac{3}{4}}$ (D) $\sqrt{\frac{1}{2}}$

(3) 设有空间闭区域 $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0\}$,

$\Omega_1 = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$, 则有

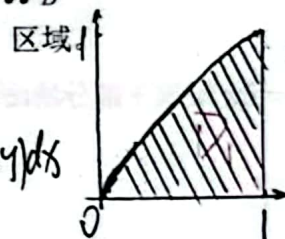
$$(A) \iiint_{\Omega} x dv = 4 \iiint_{\Omega_1} x dv \quad (B) \iiint_{\Omega} y dv = 4 \iiint_{\Omega_1} y dv$$

$$(C) \iiint_{\Omega} z dv = 4 \iiint_{\Omega_1} z dv \quad (D) \iiint_{\Omega} xyz dv = 4 \iiint_{\Omega_1} xyz dv$$

被积函数关于 x, y 为奇函数, 且偶函数.

3. 计算下列二重积分

(1) $\iint_D e^{\frac{y^2}{2}} dx dy$, 其中 D 是由 $y = \sqrt{x}, x = 1, y = 0$ 围成的闭区域.

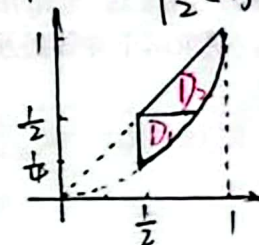


解: $e^{-\frac{y^2}{2}}$ 不能先积 y .
 $\begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ y^2 \leq x \leq 1 \end{cases}$

$$I = \int_0^1 dy \int_{y^2}^1 e^{\frac{y^2}{2}} dx = \int_0^1 [e^{\frac{y^2}{2}} (1 - y^2)] dy = \int_0^1 [e^{\frac{y^2}{2}} - y^2 e^{\frac{y^2}{2}}] dy = y e^{\frac{y^2}{2}} \Big|_0^1 = e^{\frac{1}{2}}$$

(2) 计算积分 $I = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} dy \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}} e^x dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}} e^x dx$.

解: $D_1: \begin{cases} \frac{1}{4} \leq y \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \leq x \leq \sqrt{y} \end{cases} \quad D_2: \begin{cases} \frac{1}{2} \leq y \leq 1 \\ y \leq x \leq \sqrt{y} \end{cases}$



$D_1 \cup D_2: \begin{cases} \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ x^2 \leq y \leq x \end{cases}$

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^1 dx \int_{x^2}^x e^{\frac{y}{x}} dy = \int_{\frac{1}{2}}^1 x e^{\frac{y}{x}} \Big|_{x^2}^x dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 (x e - x e^x) dx = \left[\frac{1}{2} e x^2 - (x e^x - e^x) \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{3}{8} e - \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}}$$

9.1.2 对坐标的曲线积分

1、计算下列对坐标的曲线积分

(1) $\int_L (x^2 - y^2) dx$, 其中 L 是抛物线 $y = x^2$ 上从 $(0,0)$ 到点 $(2,4)$ 的一段弧. $L: y = x^2, x: 0 \rightarrow 2$.

$$\begin{aligned} \text{解: 原式} &= \int_0^2 (x^2 - x^4) dx \\ &= \left(\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{5} x^5 \right) \Big|_0^2 = -\frac{56}{15} \end{aligned}$$

(2) $\int_L x dx + y dy + (x + y - 1) dz$, 其中 Γ 是从 $(1,1,1)$ 到点 $(2,3,4)$

的一段直线.

$$\begin{aligned} \text{解: 直线的方向向量 } \vec{\tau} &= \{1, 2, 3\}, \therefore l: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3} \\ \Gamma \text{ 的参数式: } x &= 1+t, y = 1+2t, z = 1+3t, t: 0 \rightarrow 1 \\ \text{原式} &= \int_0^1 [(1+t) + 2(1+2t) + 3(1+3t)] dt = (7t^2 + 6t) \Big|_0^1 \\ &= 13 \end{aligned}$$

(3) $\int_L \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2}$, 其中 L 为圆周 $x^2 + y^2 = a^2$

(按逆时针方向绕行)

$$\text{解: } L: x = a \cos \theta, y = a \sin \theta, \theta: 0 \rightarrow 2\pi$$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_0^{2\pi} \frac{(a \cos \theta + a \sin \theta)(-a \sin \theta) - (a \cos \theta - a \sin \theta)(a \cos \theta)}{a^2} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (-1) d\theta = -2\pi. \end{aligned}$$

(4) $\oint_L xy dx$, 其中 L 为圆周 $(x-a)^2 + y^2 = a^2 (a > 0)$ 及 x 轴

所围成的在第一象限内的区域的整个边界。(按逆时针方向绕行)

$$\text{解: } L = L_1 + L_2, L_1: x = a + a \cos \theta, y = a \sin \theta, \theta: 0 \rightarrow \pi$$

$$L_2: y = 0, x: 0 \rightarrow 2a$$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_{L_1} xy dx + \int_{L_2} xy dx = \int_0^\pi (a + a \cos \theta)(a \sin \theta) d(a + a \cos \theta) + \\ &= -a^3 \int_0^\pi (1 + \cos \theta) \sin^2 \theta d\theta = -a^3 \left(2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \sin^3 \theta \Big|_0^\pi \right) = -\frac{4}{3} \pi a^3 \end{aligned}$$

(5) $\int_L (x+y) dx + (y-x) dy$, 其中 L 为先沿直线从点 $(1,1)$ 到点 $(1,2)$, 然后再沿直线到点 $(4,2)$ 的折线.

$$\text{解: } L = L_1 + L_2, L_1: x = 1, y: 1 \rightarrow 2; L_2: y = 2, x: 1 \rightarrow 4$$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_{L_1} (x+y) dx + (y-x) dy + \int_{L_2} (x+y) dx + (y-x) dy \\ &= \int_1^2 (y-1) dy + \int_1^4 (x+2) dx \\ &= 14 \end{aligned}$$

2、设 L 为沿上半圆周 $x^2 + y^2 = 2x$ 从点 $(0,0)$ 到 $(1,1)$ 的曲线弧.把对坐标的曲线积分 $\int_L P dx + Q dy$ 化成对弧长的曲线积分.

$$\begin{aligned} \text{解: 设 } F(x, y) &= x^2 + y^2 - 2x, (x, y) \text{ 处 } F \text{ 的法向量} \\ \vec{n} &= \{F_x, F_y\} = \{2x-2, 2y\}, \text{ 切向量 } \vec{\tau} = \{2y, 2-2x\} \end{aligned}$$

$$\cos \alpha = 2y / |\vec{\tau}| = y, \cos \beta = (2-2x) / |\vec{\tau}| = 1-x$$

$$\therefore \int_L P dx + Q dy = \int_L [P \cdot y + Q(1-x)] ds$$

$$\text{或 } \int_L P dx + Q dy = \int_L [P \sqrt{2x-x^2} + Q(1-x)] ds$$

第9章 曲线积分与曲面积分

9.1 曲线积分

要求：理解两类曲线积分的概念、性质及相互关系，掌握两类曲线积分的计算方法

9.1.1 对弧长的曲线积分

1. 填空题

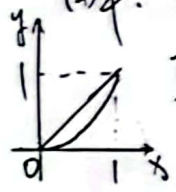
(1) 设 L 为连接 $(1,0)$ 及 $(0,1)$ 两点的直线段，则 $\int_L (x+y)ds = \underline{\sqrt{2}}$;

(2) 设 L 为下半圆周 $y = -\sqrt{1-x^2}$ ，则 $\int_L (x^2+y^2)ds = \underline{\pi}$ 。

2. 计算下列对弧长的曲线积分

(1) $\oint_L xds$ ，设 L 是由直线 $y=x$ 及 $y=x^2$ 所围区域的整个边界。

解： $L_1: y=x, x \in [0,1]; L_2: y=x^2, x \in [0,1]$



$$\begin{aligned} I &= \int_{L_1} xds + \int_{L_2} xds \\ &= \int_0^1 x\sqrt{1+1}dx + \int_0^1 x\sqrt{1+2x^2}dx \\ &= \int_0^1 \sqrt{2}x dx + \int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}dx \\ &= \frac{1}{2}(5\sqrt{5} + 6\sqrt{2} - 1) \end{aligned}$$

姓名

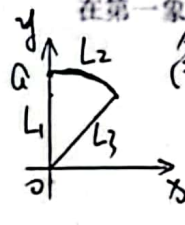
班级

学号

(2) $\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds$ ，其中 L 是由 $x^2+y^2=a^2$ ，直线 $x=0, y=x$ 。

在第一象限中所围成的图形的边界：

解： $L = L_1 + L_2 + L_3$ ， $L_1: x=0, 0 \leq y \leq a$ ， $L_2: y=x, x \in [0, \frac{\sqrt{2}}{2}a]$ ， $L_3: x^2+y^2=a^2, t \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$



$$I = \int_{L_1} e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds + \int_{L_2} e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds + \int_{L_3} e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds = \int_0^a e^y \sqrt{1+0} dy + \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a} e^{\sqrt{2}x} \sqrt{2} dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} e^a \sqrt{a^2} dt$$

(3) $\oint_{\Gamma} x^2 ds$ ，其中 Γ 是圆筒 $x^2+y^2+z^2=4$ ， $z=\sqrt{3}$ 。

解： $\Gamma: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = \sqrt{3} \end{cases} t \in [0, 2\pi]$

$$I = \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 0} dt = 4 \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \pi$$

3. 设螺旋形弹簧一圈的方程为 $x = a \cos t, y = a \sin t, z = kt$ ，其

中 $0 \leq t \leq 2\pi$ ，它的线密度 $\mu = x^2 + y^2 + z^2$ ，求关于 z 轴的转动

惯量 I_z 。

解： $I_z = \int_L (x^2+y^2) \mu(x,y,z) ds = \int_L (x^2+y^2)(x^2+y^2+z^2) ds$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi} [(a \cos t)^2 + (a \sin t)^2] [(a \cos t)^2 + (a \sin t)^2 + k^2 t^2] \sqrt{a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t + k^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} a^2 (a^2 + k^2 t^2) \sqrt{a^2 + k^2} dt \\ &= a^2 \sqrt{a^2 + k^2} \pi (2a^2 + \frac{8}{3} k^2 \pi^2). \end{aligned}$$

9.1.2 对坐标的曲线积分

1. 计算下列对坐标的曲线积分

(1) $\int_L (x^2 - y^2) dx$, 其中 L 是抛物线 $y = x^2$ 上从 $(0,0)$ 到点 $(2,4)$ 的一段弧. $L: y = x^2, x: 0 \rightarrow 2$.

$$\begin{aligned} \text{解: 原式} &= \int_0^2 (x^2 - x^4) dx \\ &= \left(\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{5} x^5 \right) \Big|_0^2 = -\frac{56}{15} \end{aligned}$$

(2) $\int_L x dx + y dy + (x + y - 1) dz$, 其中 Γ 是从 $(1,1,1)$ 到点 $(2,3,4)$

的一段直线.

解: 直线的方向向量 $\vec{T} = \{1, 2, 3\}$. $\therefore l: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$
 Γ 的参数式: $x = 1+t, y = 1+2t, z = 1+3t, t: 0 \rightarrow 1$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_0^1 [(1+t) + 2(1+2t) + 3(1+3t)] dt = (7t^2 + 6t) \Big|_0^1 \\ &= 13 \end{aligned}$$

(3) $\int_L \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2}$, 其中 L 为圆周 $x^2 + y^2 = a^2$

(按逆时针方向绕行)

解: $L: x = a \cos \theta, y = a \sin \theta, \theta: 0 \rightarrow 2\pi$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_0^{2\pi} \frac{(a \cos \theta + a \sin \theta)(-a \sin \theta) - (a \cos \theta - a \sin \theta)(a \cos \theta)}{a^2} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (-1) d\theta = -2\pi. \end{aligned}$$

(4) $\oint_L xy dx$, 其中 L 为圆周 $(x-a)^2 + y^2 = a^2 (a > 0)$ 及 x 轴

所围成的在第一象限内的区域的整个边界. (按逆时针方向绕行)

解: $L = L_1 + L_2, L_1: x = a + a \cos \theta, y = a \sin \theta, \theta: 0 \rightarrow \pi$ $L_2: y = 0, x: 0 \rightarrow 2a$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \left(\int_{L_1} + \int_{L_2} \right) xy dx = \int_0^\pi (a + a \cos \theta)(a \sin \theta) d(a + a \cos \theta) + 0 \\ &= -a^3 \int_0^\pi (1 + \cos \theta) \sin^2 \theta d\theta = -a^3 \left(2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \sin^3 \theta \Big|_0^\pi \right) = -\frac{4}{3} \pi a^3 \end{aligned}$$

(5) $\int_L (x+y) dx + (y-x) dy$, 其中 L 为先沿直线从点 $(1,1)$ 到点 $(1,2)$, 然后再沿直线到点 $(4,2)$ 的折线.解: $L = L_1 + L_2, L_1: x = 1, y: 1 \rightarrow 2; L_2: y = 2, x: 1 \rightarrow 4$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \left(\int_{L_1} + \int_{L_2} \right) (x+y) dx + (y-x) dy \\ &= \int_1^2 (y-1) dy + \int_1^4 (y+2) dx \\ &= 14 \end{aligned}$$

2. 设 L 为沿上半圆周 $x^2 + y^2 = 2x$ 从点 $(0,0)$ 到 $(1,1)$ 的曲线弧.把对坐标的曲线积分 $\int_L P dx + Q dy$ 化成对弧长的曲线积分.

解: 设 $F(x, y) = x^2 + y^2 - 2x$, 则 (x, y) 处的法向量
 $\vec{n} = \{F_x, F_y\} = \{2x-2, 2y\}$. 切向量 $\vec{T} = \{2y, 2-2x\}$

$$\cos \alpha = 2y / |\vec{T}| = y, \cos \beta = (2-2x) / |\vec{T}| = 1-x$$

$$\therefore \int_L P dx + Q dy = \int_L [P \cdot y + Q(1-x)] ds$$

$$\text{或 } \int_L P dx + Q dy = \int_L [P \sqrt{2x-x^2} + Q(1-x)] ds$$

9.2 格林公式及其应用

要求: 熟练掌握格林公式, 熟练运用平面上曲线积分与路径无关的条件简化积分的计算, 会二元函数的全微分求积。

1. 填空题

(1) 已知 $L: x^2 + y^2 = 9$ 取正向, 则

$$\oint_L (2xy - 2y)dx + (x^2 - 4x)dy = -18\pi$$

(2) 已知 $L: |x| + |y| = 1$ 为逆时针方向, 则 $\oint_L \frac{xdy - ydx}{|x| + |y|} = 4$

2. 利用格林公式计算下列曲线积分

(1) $\oint_L \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2}$, 其中 L 为圆周 $x^2 + (y-1)^2 = 2$ 。

(按逆时针方向绕行)

解: $P = \frac{x+y}{x^2+y^2}, Q = \frac{y-x}{x^2+y^2}$, 设 $l: x^2 + y^2 = r^2$ (按逆时针方向绕行)

$$\therefore \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x^2 - y^2 - 2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}, l: x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, \theta: 0 \rightarrow 2\pi$$

$$\therefore I = \oint_L \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{r^2} \int_0^{2\pi} [r(\cos \theta + \sin \theta) \cdot (-r \sin \theta) + r(\cos \theta - \sin \theta) \cdot r \cos \theta] d\theta$$

(2) $\int_L (e^x \sin y - 2y)dx + (e^x \cos y - 2)dy$, 其中 L 为上半圆周 $x^2 + y^2 = a^2, y \geq 0$ 沿逆时针方向。

解: 作辅助线 $l: y=0, x: 0 \rightarrow 2a$, 设 D 为 L 与 l 所围区域。

$$I = (\phi_{L+l} - \phi_l) = \oint_{L+l} (e^x \sin y - 2y)dx + (e^x \cos y - 2)dy$$

$$= \iint_D 2 dx dy - 0 = 2 \cdot \frac{1}{2} \pi a^2 = \pi a^2$$

3. 证明积分 $\int_L (2xy^3 - y^2 \cos x)dx + (1 - 2y \sin x + 3x^2 y^2)dy$

与路径无关并计算, 其中 L 为在抛物线 $2x = \pi y^2$ 上由点 $(0,0)$

到 $(\frac{\pi}{2}, 1)$ 的一段弧。

解: $P = 2xy^3 - y^2 \cos x, Q = 1 - 2y \sin x + 3x^2 y^2$

$$\therefore \frac{\partial P}{\partial y} = 6xy^2 - 2y \cos x = \frac{\partial Q}{\partial x}, \therefore \text{积分与路径无关}$$

$$\therefore I = \int_{(0,0)}^{(\frac{\pi}{2}, 1)} (2xy^3 - y^2 \cos x)dx + (1 - 2y \sin x + 3x^2 y^2)dy = \frac{\pi^2}{4}$$

4. 验证 $(4x^3 y^3 - 3y^2 + 5)dx + (3x^4 y^2 - 6xy - 4)dy$ 为某一函数

$u(x, y)$ 的全微分, 并求 $u(x, y)$ 。

解: $P = 4x^3 y^3 - 3y^2 + 5, Q = 3x^4 y^2 - 6xy - 4$

$$\therefore \frac{\partial P}{\partial y} = 12x^3 y^2 - 6y = \frac{\partial Q}{\partial x}, \therefore Pdx + Qdy \text{ 为某 } u(x, y) \text{ 的全微分}$$

$$u(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy = \int_0^x 5 ds + \int_0^y (3s^4 y^2 - 6sy - 4) dy$$

$$= x^4 y^3 - 3xy^2 + 5x - 4y + C$$

5. 利用曲线积分, 计算星形线 $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$ 所围成的图形的面积。

解: 由对称性有: $A = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cos^4 t \cdot a \sin^3 t dt$

$$= 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t \cdot \sin^3 t dt$$

$$= 4a^2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t (1 - \cos^2 t) dt$$

$$= 12a^2 (I_4 - I_6) = 12a^2 \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} (1 - \frac{1}{6}) \right)$$

$$= \frac{3}{8} \pi a^2$$

9.3 曲面积分

要求: 理解两类曲面积分的概念、性质及相互关系, 掌握两类曲面积分的计算方法:

9.3.1 对面积的曲面积分

1. 计算下列对面积的曲面积分

(1) $\iint_{\Sigma} z^2 dS$, 其中 $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

解: 设 $\Sigma_1: z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leq R^2$

解: 由对称性可知
4倍得

$\iint_{\Sigma} z^2 dS = 4 \iint_{\Sigma_1} z^2 dS = 4 \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} (R^2 - x^2 - y^2) \frac{R dx dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$

$I = \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS$

$= \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} R^2 dS$

$= \frac{1}{2} R^2 \cdot 4\pi R^2$

$= 2\pi R^4$

(2) $\iint_{\Sigma} z dS$, 其中 Σ 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在柱面 $x^2 + y^2 \leq 2x$ 内的部分.

解: $I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} dx dy, D: x^2 + y^2 \leq 2x$

$= \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} \rho \cdot \rho d\rho$

$= 2\sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} \rho^3 \Big|_0^{2\cos\theta} d\theta$

$= 2\sqrt{2} \cdot \frac{8}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta d\theta = \frac{16\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{2}{3}$

$= \frac{32}{9}\sqrt{2}$

(3) $\iint_{\Sigma} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} dS$, 其中 $\Sigma: x^2 + y^2 = R^2$ 在 $z = 0, z = H$ 之间的部分.

解: $dS = 2\pi R dz$

$I = \int_0^H \frac{2\pi R dz}{R^2 + z^2} = 2\pi R \cdot \frac{1}{R} \arctan \frac{z}{R} \Big|_0^H$

$= 2\pi \arctan \frac{H}{R}$

2. 试求半径为 R 的上半球壳的质量, 已知其各点处密度数量上等于该点到铅垂直径的距离.

解: 建立坐标系, 将球心设为原点, $\Sigma: z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leq R^2$

密度 $\mu(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$

$M = \iint_{\Sigma} \mu(x, y, z) dS = \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \frac{R dx dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$

$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho \cdot \frac{\rho R d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \xrightarrow{\rho=R\sin t} 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^3 \frac{\sin^2 t}{\cos t} dt \cdot \cos t$

$M = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^3 \sin^2 t dt = 2\pi R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = 2\pi R^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \pi^2 R^3$

$= 2\pi R^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \pi^2 R^3$

9.4 高斯公式 通量与散度

要求: 熟练掌握高斯公式, 了解散度、通量的概念, 会求散度与通量。

1. 填空题

(1) 光滑闭曲线 Σ 所围体积为 V , $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为 Σ 的外法线的方向余弦, 则

$$\iint_{\Sigma} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS = \underline{3V} :$$

(2) 设 $u = xy^2 - yz^3$, 且 $\vec{A} = \text{grad} u$, 则 $\text{div } \vec{A} = \underline{2x - 6yz}$.

2. 利用高斯公式计算下列曲面积分

(1) $\iint_{\Sigma} x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy$, 其中 Σ 为下半球面

$$z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \text{ 的下侧.}$$

解: 作辅助面 $\Sigma_1: x^2 + y^2 \leq a^2, z=0$, 取上侧. 记 Σ_1 为 Σ_1 .

$$I = \left(\iint_{\Sigma + \Sigma_1} - \iint_{\Sigma_1} \right) x^3 dy dz - y^3 dz dx + z^3 dx dy$$

$$= \iiint_{\Sigma + \Sigma_1} (3x^2 + 3y^2 + 3z^2) dV - 0$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^a 3r^2 \cdot r^2 \sin \varphi dr$$

$$= 2\pi \cdot 1 \cdot \frac{3}{5} r^5 \Big|_0^a = \frac{6}{5} \pi a^5.$$

(2) $\iint_{\Sigma} (y^2 - z) dy dz + (z^2 - x) dz dx + (x^2 - y) dx dy$, 其中 Σ

是锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2} (0 \leq z \leq h)$ 的下侧.

解: 作辅助面 $\Sigma_1: x^2 + y^2 \leq h^2, z=h$, 取上侧. 记 Σ_1 为 Σ_1 .

$$I = \left(\iint_{\Sigma + \Sigma_1} - \iint_{\Sigma_1} \right) (y^2 - z) dy dz + (z^2 - x) dz dx + (x^2 - y) dx dy$$

$$= \iiint_{\Sigma + \Sigma_1} (0 + 0 + 0) dV - \iint_{\Sigma_1} (x^2 - y) dx dy = - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h \rho^2 \cos \theta \cdot \rho d\rho = - \frac{\pi}{4} h^4.$$

(3) $\iint_{\Sigma} \frac{xdydz + ydzdx + zdx dy}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}$, 其中 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的外侧表面.

解: $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$

$$I = \iint_{\Sigma} \frac{1}{a^3} (x dy dz + y dz dx + z dx dy)$$

$$= \iiint_{\Sigma} \frac{1}{a^3} (1 + 1 + 1) dV = \frac{3}{a^3} \cdot \frac{4}{3} \pi a^3$$

$$= 4\pi.$$

3. 试求向量 $\vec{A} = (2x + 3z)\vec{i} - (xz + y)\vec{j} + (y^2 + 2z)\vec{k}$ 穿过曲面

Σ : 以点 $(3, -1, 2)$ 为球心, 半径 $R=3$ 的球面, 流向外侧的通量.

解: $\Sigma: (x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 \leq 9$

$$\Phi = \iint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \vec{S} = \iiint_{\Sigma} (2 + (-1) + 2) dV$$

$$= 3 \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 3^3 = 108\pi.$$

9.5 斯托克斯公式 环流量与旋度

要求: 了解斯托克斯公式; 了解环流量、旋度的概念, 会求环流量与旋度。

1. 设 $u = xy^2 - yz^3$, 且 $\vec{A} = \text{grad} u$, 则 $\text{rot } \vec{A} = \{0, 0, 0\}$ 。

2. 利用斯托克斯公式计算下列曲线积分

(1) $\oint_{\Gamma} (y+1)dx + (z+2)dy + (x+3)dz$, 其中 Γ 是曲线

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}, \text{从 } z \text{ 轴正向看去曲线 } \Gamma \text{ 的方向为逆时针方向。}$$

解: 设 Γ 所围平面为 Σ , 取上侧。单位法向量 $\vec{n} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\} = \{\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\}$ 。

$$I = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y+1 & z+2 & x+3 \end{vmatrix} dS$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y+1 & z+2 & x+3 \end{vmatrix} dS$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} (-1-1-1) dS$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \pi R^2 = -\frac{\pi R^2}{\sqrt{3}}$$

Γ 为球的大圆

(2) $\oint_{\Gamma} (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$, 其中 Γ 为椭圆

$$x^2 + y^2 = a^2, \frac{x}{a} + \frac{z}{b} = 1 (a, b > 0), \text{从 } x \text{ 轴正向看去曲线 } \Gamma \text{ 的方向为逆时针方向。}$$

解: 设 Γ 所围平面为 Σ , 取上侧。

$$\text{单位法向量 } \vec{n} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \{b, 0, a\}$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} b & 0 & a \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y-z & z-x & x-y \end{vmatrix} dS$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \iint_{\Sigma} [b(-1-1) + a(-1-1)] dS = \frac{-2(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}} \iint_{\Sigma} \sqrt{1 + (\frac{a}{b})^2} dS$$

3. 试求向量场 $\vec{A} = -y\vec{i} + x\vec{j} + c\vec{k}$ (c 为常数), 沿闭曲线 Γ : 圆

周 $x^2 + y^2 = 1, z = 0$ (从 z 轴正向看 Γ 依逆时针方向) 的环流量。

解: 设 Γ 所围平面为 Σ , 取上侧。单位法向量 $\{0, 0, 1\}$ 。

$$I = \oint_{\Gamma} (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & c \end{vmatrix} dS = \iint_{\Sigma} (1-1) dS$$

$$= 2\pi.$$

9.5 斯托克斯公式 环流量与旋度

要求: 了解斯托克斯公式; 了解环流量、旋度的概念, 会求环流量与旋度。

1. 设 $u = xy^2 - yz^3$, 且 $\vec{A} = \text{grad} u$, 则 $\text{rot } \vec{A} = \{0, 0, 0\}$ 。

2. 利用斯托克斯公式计算下列曲线积分

(1) $\oint_{\Gamma} (y+1)dx + (z+2)dy + (x+3)dz$, 其中 Γ 是曲线

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}, \text{从 } z \text{ 轴正向看去曲线 } \Gamma \text{ 的方向为逆时针方向。}$$

解: 设 Γ 所围平面为 Σ , 取上侧。单位法向量 $\vec{n} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\} = \{\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\}$

$$I = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y+1 & z+2 & x+3 \end{vmatrix} dS$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y+1 & z+2 & x+3 \end{vmatrix} dS$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} (-1-1-1) dS$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \pi R^2 = -\frac{\pi R^2}{\sqrt{3}}$$

Γ 为球的大圆

(2) $\oint_{\Gamma} (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$, 其中 Γ 为椭圆

$$x^2 + y^2 = a^2, \frac{x}{a} + \frac{z}{b} = 1 (a, b > 0), \text{从 } x \text{ 轴正向看去曲线 } \Gamma \text{ 的方向为逆时针方向。}$$

解: 设 Γ 所围平面为 Σ , 取上侧。

$$\text{单位法向量 } \vec{n} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \{b, 0, a\}$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} b & 0 & a \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y-z & z-x & x-y \end{vmatrix} dS$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \iint_{\Sigma} [b(-1-1) + a(-1-1)] dS = \frac{-2(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}} \iint_{\Sigma} \sqrt{1 + (\frac{a}{b})^2} dS$$

3. 试求向量场 $\vec{A} = -y\vec{i} + x\vec{j} + c\vec{k}$ (c 为常数), 沿闭曲线 Γ : 圆

周 $x^2 + y^2 = 1, z = 0$ (从 z 轴正向看 Γ 依逆时针方向) 的环流量。

解: 设 Γ 所围平面为 Σ , 取上侧。单位法向量 $\{0, 0, 1\}$

$$I = \oint_{\Gamma} (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$$

$$= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & c \end{vmatrix} dS = \iint_{\Sigma} (1-1) dS$$

$$= 2\pi.$$

4、判别下列级数是否收敛?如果是收敛的,是绝对收敛还是条件收敛?

$$(1) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

解: $\because |u_n| = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$
 单调减少且以0为极限

$\therefore$ 由莱布尼兹判别法知原级数交错收敛

又 $|u_n| \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}$ 发散,

$$(2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{4} \quad \therefore \text{原级数不绝对收敛, 从而条件收敛}$$

解: $\because |u_n| \leq \frac{1}{n^2}$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛

$\therefore$ 由比较审敛法知, 原级数绝对收敛

$$(3) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{3^{n-1}}$$

解: $\because \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3^n} \cdot \frac{3^{n-1}}{n} = \frac{1}{3} < 1$

$\therefore$ 由比值审敛法知, 原级数绝对收敛.

$$(4) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^p} \quad (p > 0)$$

解: 当 $p > 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛, 从而原级数绝对

收敛. 当 $0 < p \leq 1$ 时, 原级数交错收敛.

当 $p \leq 0$ 时, 原级数一般项不以0为极限, 从而发散.

$$(5) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n - \ln n}$$

解: 设 $f(x) = x - \ln x$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} > 0$, ($x \geq 2$), f

$\therefore n - \ln n$ 单增, 从而 $\frac{1}{n - \ln n}$ 单调递减.

又 $\frac{1}{n - \ln n} \rightarrow 0$ 为极限, $\therefore$ 原级数交错收敛.

$\because \frac{1}{n - \ln n} \sim \frac{1}{n}$, 且 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, $\therefore$ 原级数条件收敛.

5、已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 都收敛, 且有 $a_n \leq b_n \leq c_n$, 试证级数

$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 也收敛.

证: $\because \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} (c_n - a_n)$ 收敛

由 $a_n \leq b_n \leq c_n$ 有 $0 \leq b_n - a_n \leq c_n - a_n$

由 $b_n - a_n$ 的比较审敛法知 $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n)$ 收敛

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} [(b_n - a_n) + a_n]$ 收敛

第10章 无穷级数

10.1 常数项级数的概念与性质

要求：理解级数收敛与发散的概念，掌握级数的基本性质和级数收敛的必要条件。

1、填空题

(1) 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 n 部分和 $S_n = \frac{2n}{n+1}$ ，则该级数敛散性为 收敛，其和为 2。

(2) $\frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{10 \cdot n} + \cdots$ 的敛散性为 发散。

2、根据级数收敛与发散的判定定义判别下列级数的敛散性。

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

解： $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

$S_n = \sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \sqrt{n+1} - 1$

$\because \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty \therefore$ 级数 发散

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n-1)}$

解： $u_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$

$S_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$

$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right)$

$\because \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{2} \therefore$ 级数 收敛。

3、判别下列级数的敛散性。

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{8^n}{9^n}$

解：此为等比级数， $|q| = \frac{8}{9} < 1$

$\therefore$ 级数 收敛

(2) $\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[n]{3}} + \cdots$

解： $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{3}} = 1 \neq 0$

$\therefore$ 级数 发散

(3) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) + \cdots$

解：设 $u_n = \frac{1}{2^n}, v_n = \frac{1}{3^n}, n \geq 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均为等比级数，且公比均小于1

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ 均收敛 $\therefore$ 原级数 收敛

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{2n}{3n-1} \right)$

解： $\because \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ 收敛 (等比级数 $|q| = \frac{1}{3} < 1$)

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n-1}$ 发散 (一般项 $\frac{n}{3n-1}$ 不以0为极限)

$\therefore$ 原级数 发散

10.2 常数项级数的审敛法

要求: 熟练掌握正项级数的比较审敛法及其极限形式; 熟练掌握正项级数的比值审敛法, 了解根值审敛法; 熟练掌握交错级数的莱布尼茨判别法, 理解任意项级数的绝对收敛与条件收敛的概念及相互关系。

1、用比较判别法或比较判别法的极限形式判别下列级数敛散性。

(1) $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{2a+b} + \dots + \frac{1}{na+b} + \dots \quad (a>0, b>0)$

解: 取 $u_n = \frac{1}{na+b}, v_n = \frac{1}{n}$

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{1}{a}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 具有相同的敛散性

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{n} \quad \therefore \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散 $\therefore$ 原级数发散

解: 取 $v_n = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$, $\therefore \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛

又 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{n} / \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 具有相同的敛散性

(3) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \ln n}$ 从原级数收敛

解: 取 $v_n = \frac{1}{n^2}$, $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$

又 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛

$\therefore$ 原级数收敛

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n}$

解: 取 $v_n = \frac{1}{2^n}$, $\therefore 0 \leq u_n \leq v_n$

又 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, $\therefore$ 原级数收敛 ($|q| < 1$)

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos \frac{\pi}{n})$

解: 取 $v_n = \frac{1}{n^2}$, $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$

又 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \frac{\pi^2}{6}$ 收敛

$\therefore$ 原级数收敛

(6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n} \quad (a>0)$

解: ① 当 $0 < a < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$

$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1 \neq 0$, 级数发散

② 当 $a = 1$ 时, $u_n = \frac{1}{2} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, 级数发散

③ 当 $a > 1$ 时, 取 $v_n = \frac{1}{a^n}$

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$, 又 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n}$ 收敛

$\therefore$ 原级数收敛

2、用比值判别法判别下列级数的敛散性。

$$(1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$$

$$\begin{aligned} \text{解: } \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1}/u_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n \cdot n!} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{2}{e} < 1 \end{aligned}$$

$\therefore$ 原级数收敛

$$(2) \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)^2 \tan \frac{\pi}{3^n}$$

$$\begin{aligned} \text{解: } \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1}/u_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^2 \tan \frac{\pi}{3^{n+1}}}{(n+1)^2 \tan \frac{\pi}{3^n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^2}{(n+1)^2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{3^{n+1}}}{\frac{\pi}{3^n}} = \frac{1}{3} < 1 \end{aligned}$$

$\therefore$ 原级数收敛

$$(3) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

$$\begin{aligned} \text{解: } \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1}/u_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2/2^{n+1}}{n^2/2^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1 \end{aligned}$$

$\therefore$ 原级数收敛

3、用根值判别法判别下列级数的敛散性。

$$(1) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{3n-1} \right)^{2n-1}$$

$$\text{解: } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{3n-1} \right)^{2-\frac{1}{n}} = \frac{1}{3} < 1$$

$\therefore$ 原级数收敛

$$(2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2}$$

$$\text{解: } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \frac{e}{2} > 1$$

$\therefore$ 原级数发散

$$(3) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{b}{a_n} \right)^n, \text{ 其中 } a_n \rightarrow a \ (n \rightarrow \infty), a_n, b, a \ (a \neq b) \text{ 均为正数。}$$

$$\text{解: } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b}{a_n} = \frac{b}{a}$$

当 $a > b$ 时, $\frac{b}{a} < 1$, 原级数收敛

当 $a < b$ 时, $\frac{b}{a} > 1$, 原级数发散

加南郎校園牆領各科期末考試資料QQ296660732

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)nx^n$ 赋值法, $x=1$ 致成 $(-1, 1)$

$$\begin{aligned} \text{② } S(x) &= x \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)n x^{n-1} \\ &= x \sum_{n=1}^{\infty} (x^{n+1})'' = x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} \right)'' \\ &= x \cdot \left(\frac{x^2}{1-x} \right)'' = x \left(\frac{x^2 - 1 + 1}{1-x} \right)'' \\ &= x \left(-1 - x + \frac{1}{1-x} \right)'' = \frac{-2x}{(x-1)^3}, \quad x \in (-1, 1). \end{aligned}$$

当 $x = \pm 1$ 时

6. 求数项级数 $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n^2-1)2^n}$ 的和。

解: 考查 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n^2-1}$ $\frac{1}{x} \int_0^x \sum_{n=2}^{\infty} x^n dx$

收敛域为 $[-1, 1)$

$$S(x) = \frac{1}{2} \left[\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[x \cdot \int_0^x \sum_{n=2}^{\infty} x^{n-2} dx - \right.$$

7、将下列函数在指定点处展开成幂级数。 $-\frac{1}{4} \ln 2 + \frac{2}{8}$

(1) $f(x) = \ln(1+x-2x^2)$ 在 $x_0 = 0$ 处。

解: $f(x) = \ln[(1-x)(1+2x)] = \ln(1-x) + \ln(1+2x)$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{n+1}}{n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} [(-1)^n 2^{n+1} - 1] x^{n+1}, \quad x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$$

(2) $f(x) = \frac{1}{2x^2 + x - 3}$ 在 $x_0 = 3$ 处。

$$\begin{aligned} \text{解: } f(x) &= \frac{1}{(2x+1)(x-1)} = \frac{\frac{1}{5}}{x-1} - \frac{\frac{2}{5}}{2x+1} = \frac{\frac{1}{5}}{2+(x-3)} - \frac{\frac{2}{5}}{1+2(x-3)} \\ &= \frac{1}{10} \frac{1}{1+\frac{x-3}{2}} - \frac{2}{45} \frac{1}{1+\frac{2(x-3)}{9}} = \frac{1}{10} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x-3}{2}\right)^n - \frac{2}{45} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2(x-3)}{9}\right)^n \\ &= \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{2^{n+1}} - \left(\frac{2}{9}\right)^{n+1} \right] (x-3)^n \end{aligned}$$

由 $\left| \frac{x-3}{2} \right| < 1$, $\left| \frac{2(x-3)}{9} \right| < 1$ 得 $x \in (1, 5)$.

8、将函数 $f(x)=x$ 按下列要求展开, 并比较各和函数的图形。

(1) 在 $(0, \pi)$ 内展开成以 2π 为周期的余弦级数。

解: 将 $f(x)$ 进行偶延拓, 并进行周期延拓.

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^{\pi} = \pi.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \int_0^\pi x \sin nx = \frac{2}{n\pi} \left[x \sin nx \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin nx dx \right]$$

$$= \frac{2}{n\pi} \cdot \frac{1}{n} \omega \sin x \Big|_0^\pi = \frac{2}{n^2\pi} [(-1)^n - 1]$$

$$= \begin{cases} 0 & n=2m \text{ 偶} \\ \frac{-4}{n^2\pi} = \frac{-4}{(2m-1)^2\pi} & n=2m-1 \text{ 奇}, m=1, 2, \dots \end{cases}$$

由于 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上连续

$$\therefore f(x) = \frac{\pi}{2} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2 \pi} \cos(2n-1)x, \quad x \in (0, \pi)$$

(2) 在 $(0, \pi)$ 内展开成以 π 为周期的傅里叶级数。解: $l = \frac{\pi}{2}$ 进行周期延拓得 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 内

$$F(x) = \begin{cases} x & x \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ x + \pi & x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(x) dx = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (x + \pi) dx \right) = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(x) \cos 2nx dx = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2nx dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (x + \pi) \cos 2nx dx \right) = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(x) \sin 2nx dx = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2nx dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (x + \pi) \sin 2nx dx \right) = \frac{1}{n}$$

$$\therefore f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin 2nx, \quad x \in (-\pi, \pi)$$

9. 将 $f(x) = \frac{\pi-x}{2} (0 \leq x \leq \pi)$ 展开成以 2π 为周期的正弦级数,并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ 的和。

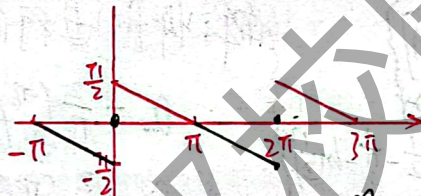
$$\text{解: } b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi-x}{2} \sin nx dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} \left(-\frac{1}{n} \right) \cos nx + \frac{1}{2n} x \cos nx - \frac{1}{2n^2} \sin nx \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{n}$$

$$\therefore f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx, \quad x \in (0, \pi)$$



$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin \frac{(2k-1)\pi}{2} \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} \sin \frac{2k\pi}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} (1)^{k+1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

10. 设偶函数 $f(x)$ 的二阶导数 $f''(x)$ 在 $x=0$ 的一个邻域内连续,且 $f(0)=1$, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} [f(\frac{1}{n}) - 1]$ 是绝对收敛的。证: 由 $f''(x)$ 在 $x=0$ 的一个邻域内连续有

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + o(x^2) \quad (*)$$

由 $f(x)$ 为偶函数, 知 $f'(x)$ 为奇函数

$$\therefore f'(0) = 0$$

$$\therefore f(x) - f(0) = \frac{f''(0)}{2!}x^2 + o(x^2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f(\frac{1}{n}) - 1}{\frac{1}{n^2}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{f''(0)}{2!} \frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n^2}} \right| = \left| \frac{f''(0)}{2} \right|$$

由 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} [f(\frac{1}{n}) - 1]$ 绝对收敛。

(*) 也可换成:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\xi)}{2!}x^2$$

(带拉格朗日型余项的一阶泰勒公式)

6. 计算下列曲面积分

(1) $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS$, 其中 $\Sigma: (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$;

解: Σ 变为 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 - a^2 - b^2 - c^2 + 2ax + 2by + 2cz$

$$\begin{aligned} \therefore I &= (R^2 - a^2 - b^2 - c^2) \iint_{\Sigma} dS + (2a \cdot \bar{x} + 2b \cdot \bar{y} + 2c \cdot \bar{z}) \iint_{\Sigma} dS \\ &= (R^2 - a^2 - b^2 - c^2 + 2a^2 + 2b^2 + 2c^2) \cdot 4\pi R^2 \\ &= (R^2 + a^2 + b^2 + c^2) 4\pi R^2 \end{aligned}$$

(2) $\iint_{\Sigma} (xy + yz + zx) dS$, 其中 Σ 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被曲面

$x^2 + y^2 = 2ax$ 所截得的部分。

解: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

$$I = \iint_{\Sigma} (xy + y\sqrt{x^2 + y^2} + x\sqrt{x^2 + y^2}) \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2}} d\sigma$$

$x^2 + y^2 \leq 2ax$ 关于 y 轴对称
关于 x 轴对称

$$= \sqrt{2} \iint_{x^2 + y^2 \leq 2ax} x \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma = \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \cos \theta} \rho \cos \theta \cdot \rho \cdot \rho d\rho$$

$$= 2\sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^{2a \cos \theta} d\theta = 8\sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^4 \cos^5 \theta d\theta$$

$$= 8\sqrt{2} a^4 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{64}{15} \sqrt{2} a^4$$

(3) $\iint_{\Sigma} (x^3 + az^2) dydz + (y^3 + ax^2) dzdx + (z^3 + ay^2) dx dy$,

其中 Σ 为上半球面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 的上侧。

解: 补面 $\Sigma_1: z=0, x^2 + y^2 \leq a^2$, 取下面。

由高斯公式得 (设 Σ 与 Σ_1 所围立体的体积为 Ω):

$$\begin{aligned} I &= \left(\iint_{\Sigma + \Sigma_1} P dydz + Q dzdx + R dx dy \right) \\ &= \iiint_{\Omega} (3x^2 + 3y^2 + 3z^2) dv - \left[\iint_{\Sigma_1} ay^2 dx dy \right] \end{aligned}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a \rho^2 \cdot \rho \sin \theta d\rho + \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a \rho^2 \sin^2 \theta d\rho$$

$$= 2\pi \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} a^5 = \frac{\pi}{2} a^5$$

(4) $\iint_{\Sigma} x(8y+1) dydz + 2(1-y^2) dzdx - 4yz dx dy$, 其中 Σ 是由

曲线 $\begin{cases} z = \sqrt{y-1} \\ x=0 \end{cases}, 1 \leq y \leq 3$ 绕 y 轴旋转一周而成的曲面, 其

法向量与 y 轴正向的夹角恒大于 $\frac{\pi}{2}$;

解: 旋转曲面的方程为 $x^2 + z^2 = y-1, 1 \leq y \leq 3$, 取外侧。

补面 $\Sigma_1: z=0, x^2 + y^2 \leq 2$, 取右侧。由高斯公式得

(设 Ω 为 Σ 与 Σ_1 所围立体的体积):

$$I = \iiint_{\Omega} [8y + 1 + (-4y) + (-4y)] dv - \iint_{\Sigma_1} 2 \cdot (1-y^2) dz dx$$

$$= \iiint_{\Omega} dv + 16 \cdot \pi \cdot (\sqrt{2})^2 = 2\pi + \iint_{\Sigma_1} dz dx \int_{y^2+1}^3 dy$$

$$= 2\pi + \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2}} (2-\rho^2) \rho d\rho = 2\pi + 2\pi = 4\pi$$

加南邮校园墙领各科期末试卷资料QQ296666931

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)nx^n$ 收敛域为 $(-1, 1)$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)(n+1)}{(n+1)n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n} = 1 \\ \therefore R = \frac{1}{\rho} = 1 \\ \text{So } x = \pm 1 \end{aligned}$$

当 $x = \pm 1$ 时

6、求数项级数 $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n^2-1)2^n}$ 的和。

解: 考查 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n^2-1}$, $\frac{1}{x} \int_0^x \sum_{n=2}^{\infty} x^n dx$
收敛域 $x \in (-1, 1)$
$$S(x) = \frac{1}{2} \left[\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} \right] = \frac{1}{2} \left[x \cdot [-\ln(1-x)] + \frac{1}{x} \left[-x - \frac{1}{2}x^2 - \ln(-x) \right] \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[x \int_0^x \sum_{n=2}^{\infty} x^{n-2} dx - \dots \right]$$

原级数 $S = S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} \left[-\ln\left(\frac{1}{2}\right) \right] + 2 \right\}$

7、将下列函数在指定点处展开成幂级数。

(1) $f(x) = \ln(1+x-2x^2)$ 在 $x_0 = 0$ 处。

解: $f(x) = \ln[(1-x)(1+2x)] = \ln(1-x) + \ln(1+2x)$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{n+1}}{n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} [(-1)^n 2^{n+1} - 1] x^{n+1}, \quad x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

(2) $f(x) = \frac{1}{2x^2 + x - 3}$ 在 $x_0 = 3$ 处。

$$\begin{aligned} \text{解: } f(x) &= \frac{1}{(2x+3)(x+1)} = \frac{\frac{1}{5}}{x+1} - \frac{\frac{2}{5}}{2x+3} = \frac{\frac{1}{5}}{2+(x-3)} - \frac{\frac{2}{5}}{9+2(x-3)} \\ &= \frac{1}{10} \frac{1}{1+\frac{x-3}{2}} - \frac{2}{45} \frac{1}{1+\frac{2(x-3)}{9}} = \frac{1}{10} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x-3}{2}\right)^n - \frac{2}{45} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2(x-3)}{9}\right)^n \\ &= \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{2^{n+1}} - \left(\frac{2}{9}\right)^{n+1} \right] (x-3)^n \end{aligned}$$

由 $\left| \frac{x-3}{2} \right| < 1$, $\left| \frac{2(x-3)}{9} \right| < 1$ 得 $x \in (1, 5)$.

8、将函数 $f(x)=x$ 按下列要求展开, 并比较各和函数的图形。

(1) 在 $(0, \pi)$ 内展开成以 2π 为周期的余弦级数。

解: 将 $f(x)$ 进行偶延拓, 并进行周期延拓.

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^{\pi} = \pi.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \int_0^{\pi} x \sin nx = \frac{2}{n\pi} \left[x \sin nx \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin nx dx \right]$$

$$= \frac{2}{n\pi} \cdot \frac{1}{n} \omega \sin x \Big|_0^\pi = \frac{2}{n^2\pi} [(-1)^n - 1]$$

$$= \begin{cases} 0 & n=2m \text{ 偶} \\ \frac{-4}{n^2\pi} = \frac{-4}{(2m)^2\pi} & n=2m-1 \text{ 奇}, m=1, 2, \dots \end{cases}$$

由于 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上连续

$$\therefore f(x) = \frac{\pi}{2} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2 \pi} \cos(2n-1)x, \quad x \in (0, \pi).$$