

高等数学 A(I) 下 期末复习

2026.6

高阶线性微分方程+多元函数微分学

- 二阶线性常系数非齐次方程的特解及通解结构
- 分段函数在分段点连续性和偏导存在性分析
- 多元具体及抽象函数的一阶、二阶偏导计算
- 方向导数计算
- 二元连续函数在有界闭区域上的最值求解

例 $y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x$ 的特解形式为: $xe^x [a \cos 2x + b \sin 2x]$

解 特征方程为 $r^2 - 2r + 5 = 0$, 则 $r_{1,2} = 1 \pm 2i$

又 $\lambda \pm i\omega = 1 \pm 2i$ 是特征根, 则 $k=1$; 又 $m = \max\{0, 0\} = 0$

故特解形式为: $y^* = xe^x [a \cos 2x + b \sin 2x]$

复习: $y'' + py' + qy = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos \omega x + \tilde{P}_n(x) \sin \omega x]$

其特解 $y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m^{(1)}(x) \cos \omega x + R_m^{(2)}(x) \sin \omega x]$

$k = \begin{cases} 0, & \text{若 } \lambda \pm i\omega \text{ 不是特征根;} \\ 1, & \text{若 } \lambda \pm i\omega \text{ 是特征单根} \end{cases}$ $m = \max\{l, n\}$, $R_m^{(1)}(x), R_m^{(2)}(x)$ 是 m 次待定系数多项式

例 证明函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ 在 $(0, 0)$ 处偏导存在, 但不连续.

证明:

$$f_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta x \cdot 0}{(\Delta x)^2 + 0^2} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta x} = 0,$$

类似, 有 $f_y(0, 0) = 0$, 故函数在 $(0, 0)$ 处偏导存在.

$$\text{但 } \lim_{\substack{y=kx \\ x \rightarrow 0}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^2}{x^2(1+k^2)} = \frac{k}{1+k^2} \quad \text{此值随 } k \text{ 的变化而变化}$$

故 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ 不存在, 函数在 $(0, 0)$ 处不连续.

例 设 $z = f(e^x + y^2, xy)$, f 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

解: $\frac{\partial z}{\partial x} = e^x f_1' + y f_2'$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^x \frac{\partial f_1'}{\partial y} + f_2' + y \frac{\partial f_2'}{\partial y}$$

$$= e^x [f_{11}'' \cdot 2y + f_{12}'' \cdot x] + f_2' + y [f_{21}'' \cdot 2y + f_{22}'' \cdot x]$$

$$= 2ye^x f_{11}'' + f_2' + xyf_{22}'' + (xe^x + 2y^2)f_{12}''.$$

例 求函数 $u = xy + e^z$ 在 $A(2,1,2)$ 沿 A 点指向 $B(4,-1,3)$ 方向的方向导数.

解: $\overrightarrow{AB} = (2, -2, 1)$, $\cos \alpha = \frac{2}{3}$, $\cos \beta = -\frac{2}{3}$, $\cos \gamma = \frac{1}{3}$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_A = y|_{(2,1,2)} = 1, \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_A = x|_{(2,1,2)} = 2, \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_A = e^z|_{(2,1,2)} = e^2$$

$$\therefore \left. \frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{AB}} \right|_A = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_A \cos \alpha + \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_A \cos \beta + \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_A \cos \gamma = \frac{e^2 - 2}{3}$$

例 求二元函数 $f(x, y) = x^2 y(4 - x - y)$ 在由直线 $x + y = 6$, x 轴及 y 轴所围成的闭区域上的最大值和最小值.

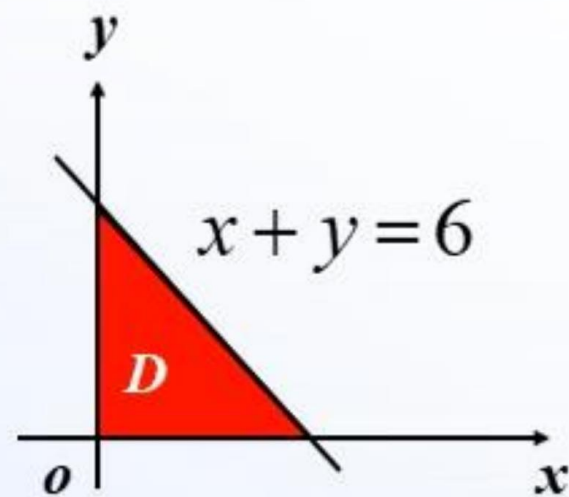
解: 先求函数在 D 内的驻点,

$$\text{解方程组} \begin{cases} f'_x(x, y) = 2xy(4 - x - y) - x^2 y = 0 \\ f'_y(x, y) = x^2(4 - x - y) - x^2 y = 0 \end{cases}$$

得 D 内唯一驻点 $(2, 1)$, 且 $f(2, 1) = 4$;

再求 函数在 D 的边界上的最值.

在边界 $x = 0$ 和 $y = 0$ 上, $f(x, y) = 0$;



在边界 $x + y = 6$ 上, 有 $y = 6 - x$,

此时, $f(x, y) = -2x^2(6 - x) \quad x \in [0, 6]$

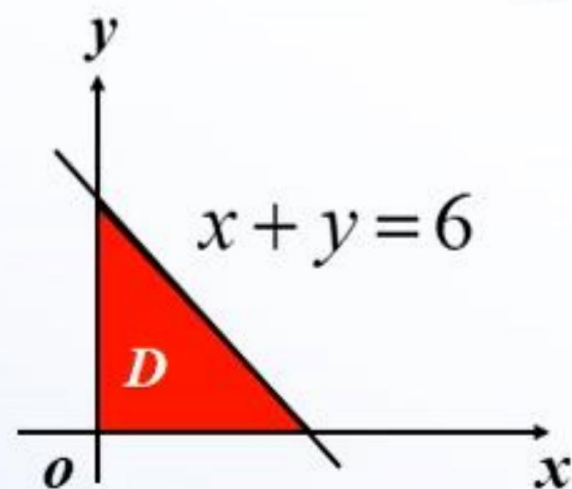
由 $f_x(x, y) = 4x(x - 6) + 2x^2 = 0$

得区间内驻点 $x = 4$, 此时, $y = 6 - x|_{x=4} = 2$,

且 $f(4, 2) = -64$, $f(0, 0) = f(6, 0) = 0$

比较后可知, 最大值为 $f(2, 1) = 4$;

最小值为 $f(4, 2) = -64$.



注: 边界 $x+y=6$ 上的条件极值, 也可用拉格朗日乘数法分析。

重积分、曲线和曲面积分

- 交换积分次序、二重积分计算 (直角坐标、极坐标)
- 三重积分计算 (直角坐标、柱面和球面坐标)
- 重积分性质、熟练利用对称性简化重积分、曲线/曲面积分
- 格林公式应用
- 高斯公式应用

例 在直角坐标系下将二重积分 $\iint_D f(x,y)d\sigma$ 写成两种不同次序的二次

积分, 其中 D 是由直线 $y = x$ 和曲线 $y^2 = x$ 围成的闭区域.

解: 原积分 $= \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} f(x,y) dy = \int_0^1 dy \int_{y^2}^y f(x,y) dx$

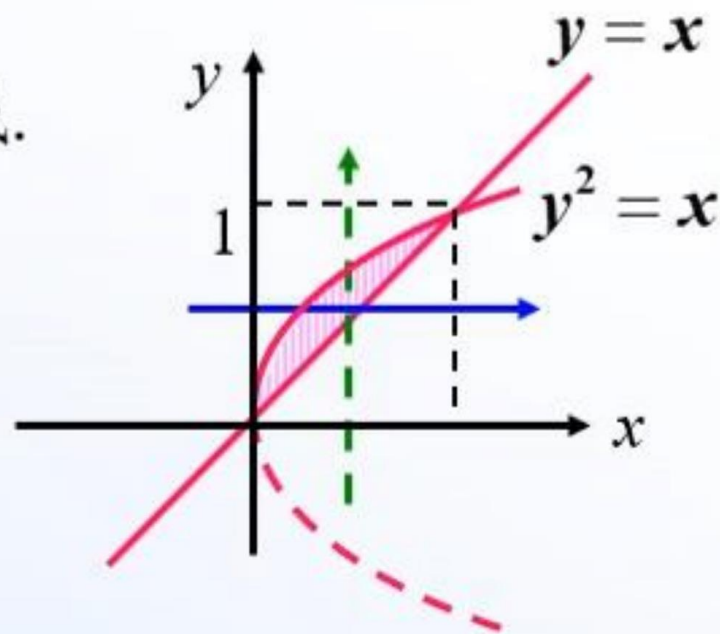
进一步, 若要写出极坐标系下的二次积分,

$$\text{原积分} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$$

思考: 若被积函数为 $f(x,y) = \frac{\sin y}{y}$, 如何求二重积分值?

$$\iint_D \frac{\sin y}{y} d\sigma = \int_0^1 dy \int_{y^2}^y \frac{\sin y}{y} dx = \int_0^1 (\sin y - y \sin y) dy = 1 - \sin 1$$

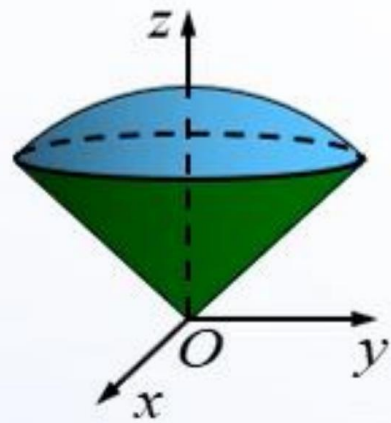
注: 要选择合适的积分次序, 保证积分能积, 好积!



例 计算 $\iiint_{\Omega} (x+z)dv$, 其中 Ω 为 $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ 与 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ 所围.

解: 利用对称性, $\iiint_{\Omega} xdv = 0$,

若用球面坐标系计算,



$$\text{原式} = \iiint_{\Omega} zdv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^1 r \cos \varphi \cdot r^2 \sin \varphi dr = \frac{\pi}{8}$$

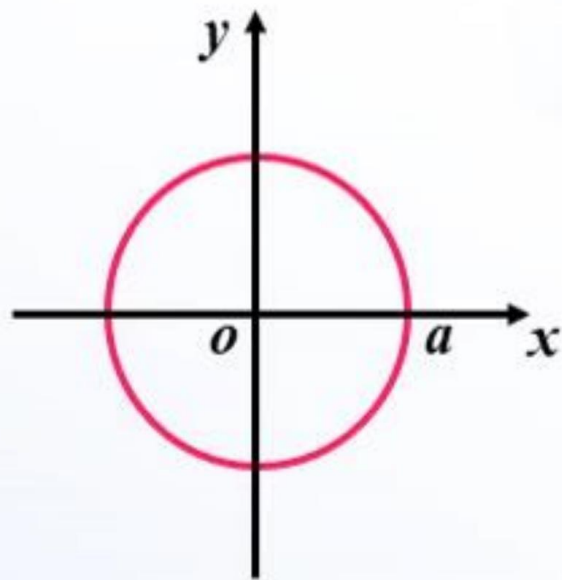
若用切片法计算, 原式 = $\iiint_{\Omega} zdv = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} zdz \iint_{x^2+y^2 \leq z^2} dxdy + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 zdz \iint_{x^2+y^2 \leq 1-z^2} dxdy$

$$= \pi \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} z^3 dz + \pi \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 z(1-z^2) dz = \frac{\pi}{8}.$$

例 计算 $\oint_L (x^2 + y^2 + \sin y) ds$, L 是圆周 $x^2 + y^2 = a^2$.

解: 利用对称性, 有 $\oint_L \sin y ds = 0$,

$$\text{原式} = \oint_L a^2 ds = a^2 \cdot 2\pi a = 2\pi a^3.$$



例 $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 4$, 则 $\iiint_{\Sigma} (y^2 + 2z^2) dS = \underline{64\pi}$

解: 利用轮换对称性,

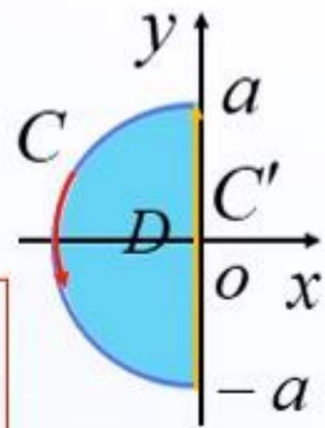
$$\iint_{\Sigma} x^2 dS = \iint_{\Sigma} y^2 dS = \iint_{\Sigma} z^2 dS = \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS$$

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS = 4 \iint_{\Sigma} dS = 64\pi.$$

例 设 C 为沿 $x^2 + y^2 = a^2$ 从点 $(0, a)$ 沿逆时针到点 $(0, -a)$ 的半圆,

计算 $\int_C \underbrace{\frac{y^2}{\sqrt{a^2 + x^2}}}_{P} dx + \underbrace{[ax + 2y \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})]}_{Q} dy \quad (a > 0).$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = a + \frac{2y}{\sqrt{a^2 + x^2}}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2y}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$



解: 添加辅助线如图, 原式 $= \oint_{C+C'} - \int_{C'}$

利用格林公式, 得

$$\text{原式} = \iint_D \left[\left(a + \cancel{\frac{2y}{\sqrt{a^2 + x^2}}} \right) - \cancel{\frac{2y}{\sqrt{a^2 + x^2}}} \right] dx dy - \underbrace{\int_{-a}^a (2y \ln a) dy}_0 = \frac{1}{2} \pi a^3$$

例 计算 $\iint_{\Sigma} (x^3 + z^2) dydz + (y^3 + x^2) dzdx + (z^3 + y^2) dxdy$,

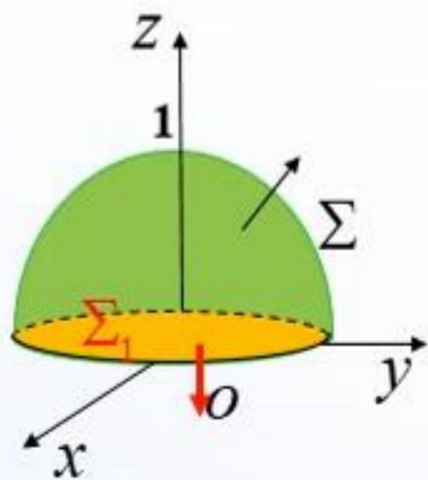
Σ 是上半球面 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, 取上侧.

解: 补面 $\Sigma_1: z = 0, (x, y) \in D_{xy}: x^2 + y^2 \leq 1$, 取下侧

记 Σ 和 Σ_1 所围区域为 Ω , 原式 = $\left(\iint_{\Sigma + \Sigma_1} - \iint_{\Sigma_1} \right)$

由高斯公式得:

$$\begin{aligned} \text{原式} &= 3 \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dxdydz - \iint_{\Sigma_1} \\ &= 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \int_0^1 r^2 \cdot r^2 dr + \iint_D y^2 dxdy \\ &= \frac{6}{5} \pi + \frac{1}{2} \iint_D (x^2 + y^2) dxdy = \frac{6}{5} \pi + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^2 \rho d\rho = \frac{29}{20} \pi \end{aligned}$$



无穷级数

- 级数收敛的定义、收敛级数的性质
- 数项级数敛散性判断、绝对收敛与条件收敛
- 幂级数收敛域和和函数求解
- 将周期为 2π 的函数展开成Fourier级数、正(余)弦级数

结论：交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 在 $p > 1$ 时绝对收敛，在 $0 < p \leq 1$ 时条件收敛.

例 判别下列级数的敛散性.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$$

解: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{2^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n n!} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e} < 1$

故原级数收敛.

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin n\alpha}{n^2} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \right)$$

解: $\because \left| \frac{\sin n\alpha}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, $\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^2}$ 绝对收敛.

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ 为满足莱布尼兹定理的交错级数, (条件) 收敛; 故原级数收敛.

思考: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 \sin n\alpha}{3^n} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$ 的敛散性如何? **发散!**

思考：如何求下列幂级数的和函数？

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

例 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{2n}$ 的和函数.

解：易知该幂级数的收敛域为 $(-1, 1)$ ，设其和函数为 $s(x)$ ，则

$$\begin{aligned} s(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} nx^{2n} = \frac{x}{2} \sum_{n=1}^{\infty} 2nx^{2n-1} = \frac{x}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} \right)' = \frac{x}{2} \left(\frac{x^2}{1-x^2} \right)' \\ &= \frac{x^2}{(1-x^2)^2} \quad x \in (-1, 1) \end{aligned}$$

例 将 $f(x) = \frac{\pi - x}{2} (0 \leq x \leq \pi)$ 分别展开成以 2π 为周期的正弦级数和余弦级数.

解: (1) 求正弦级数. 对 $f(x)$ 进行奇周期延拓,

$$\text{令 } F(x) = \begin{cases} \frac{\pi - x}{2} & 0 < x \leq \pi \\ 0 & x = 0 \\ -\frac{\pi + x}{2} & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

$$a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin nx dx$$

$$= \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} (x - \pi) d(\cos nx) = \frac{1}{n\pi} \left[(x - \pi) \cos nx \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos nx dx \right] = \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$\therefore \frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \quad (0 < x \leq \pi)$$

解：(2) 求余弦级数. 对 $f(x)$ 进行偶周期延拓,

$$b_n = 0 \quad (n=1,2,\cdots)$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi-x}{2} dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi-x}{2} \cos nx dx = -\frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} (x-\pi) d(\sin nx) \\ &= -\frac{1}{n\pi} \left[(x-\pi) \sin nx \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin nx dx \right] = \frac{1}{n^2 \pi} (1 - \cos n\pi) = \frac{1 - (-1)^n}{n^2 \pi} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\pi-x}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2} \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

复变函数

➤ 复变函数可导性、解析性

➤ 闭曲线上复积分计算

(复合闭路定理、柯西积分公式、高阶导数公式)

例 若 $f(z) = (x + ay) + i(x + y)$ 处处解析, 则常数 $a = \underline{-1}$.

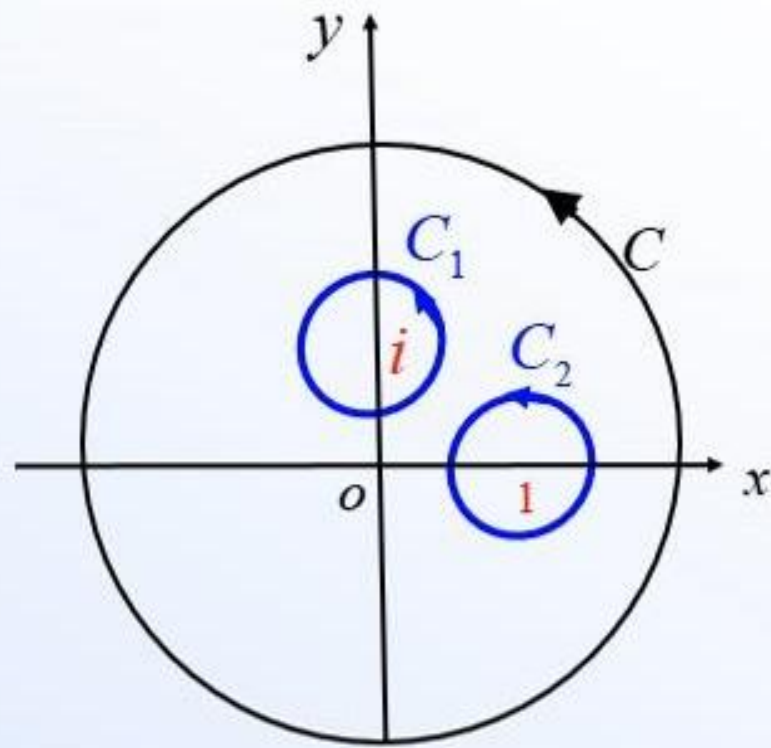
例 设 C 为正向圆周 $|z| = \frac{5}{2}$, 求 $\oint_C \frac{z}{(z-1)^2(z-i)} dz$.

解: 令 $f(z) = \frac{z}{(z-1)^2(z-i)}$, 则

$f(z)$ 在 C 内有两个奇点 $z_1 = i, z_2 = 1$,

取 ε 充分小, 作正向圆周 $C_1: |z-i| = \varepsilon$

和正向圆周 $C_2: |z-1| = \varepsilon$.



由复合闭路定理知,

$$\text{原式} = \oint_{C_1} \frac{z}{(z-1)^2(z-i)} dz + \oint_{C_2} \frac{z}{(z-1)^2(z-i)} dz$$

由柯西积分公式, 得

$$\oint_{C_1} \frac{z}{(z-1)^2(z-i)} dz = \oint_{C_1} \frac{\frac{z}{(z-1)^2}}{z-i} dz = 2\pi i \frac{z}{(z-1)^2} \Big|_{z=i} = -\pi i$$

由高阶导数公式, 得

$$\oint_{C_2} \frac{z}{(z-1)^2(z-i)} dz = \oint_{C_2} \frac{\frac{z}{z-i}}{(z-1)^2} dz = \frac{2\pi i}{(2-1)!} \left(\frac{z}{z-i} \right)' \Big|_{z=1} = \pi i$$

$\therefore$ 原积分 $= 0$.

