



简谐运动

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

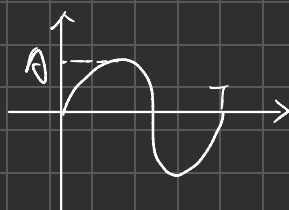
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T}$$

$$\varphi_0 =$$

相位 $\omega t + \varphi_0$

$$\text{周期 } T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\text{频率 } \nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$



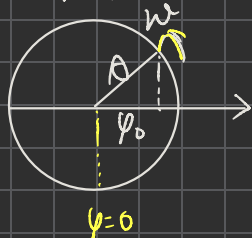
$$\text{速度 } v = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$v_{\max} = A\omega$$

$$\text{加速度 } a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$a_{\max} = A\omega^2$$

PS: 旋转矢量法



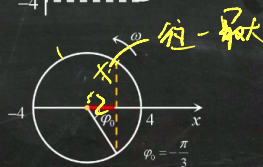
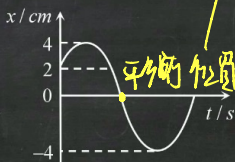
2. 振动学方程 $x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$

题1. 已知一物体作简谐运动, 周期为 1s, 振动曲线如图所示, 求简谐运动的余弦表达式。

解: 振幅 $A = 0.04m$

周期 $T = 1s$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \text{ rad/s}$$



$$\text{振幅: } A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

$$\text{角频率: } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T}$$

初相: φ_0

$$\text{周期: } T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\text{频率: } \nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$\text{速度: } v_{\max} = A\omega$$

$$\text{加速度: } a_{\max} = A\omega^2$$

$$\text{时间: } t = \frac{\Delta \varphi}{\omega} =$$

振动的能量

$$\begin{aligned}\text{机械能} &= \text{动能} + \text{势能} \\ &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2\end{aligned}$$

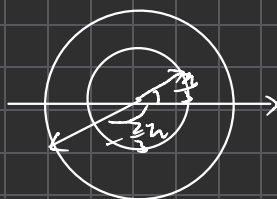
$$E_{\text{总}} = \frac{1}{2}kA^2$$

振动的合成

$$x_1 = 0.03 \cos(2\pi t + \frac{2}{3})$$

$$x_2 = 0.05 \cos(2\pi t - \frac{2\pi}{3})$$

合成振动的方程为：



解一：

$$A = 0.05 - 0.03 = 0.02$$

$$\varphi_0 = -\frac{2}{3}\pi \quad (\text{大的抵消})$$

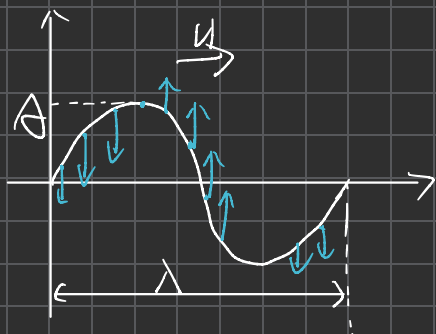
$$\therefore x = 0.02 \cos(2\pi t - \frac{2}{3}\pi)$$

解二：

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

$$\tan \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}$$

1. 机械波



(上坡下, 下坡上)
看初相

$$\text{波速 } v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \nu$$

$$\text{波动方程 } y = A \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi_0\right]$$

$$y = A \cos\left[\omega t + \varphi_0 - \frac{2\pi}{\lambda}x\right]$$

(正方向是“-”号 负方向是“+”号)

$$\text{相位差: } \frac{\lambda}{\Delta x} = \frac{2\pi}{\Delta \varphi}$$

$$\Delta \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta x$$

求波动方程

① 求原点振动方程

$$y = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

② 求波速

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \nu$$

③ 带入公式

$$y = A \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi_0\right]$$

分清是振动还是波动!!!



波



2. 波动方程

题3. 一平面简谐波 Ox 轴的负方向传播, 波长为 λ , P 处质点的振动规律如图所示, 已知 P 点与 O 点的距离为 d .

(1) 求 P 处质点的振动方程 (2) 求此波的波动表达式

解: (1) 振幅 A $\varphi_0 = \pi$ $y = A \cos(\omega t + \pi)$ 代入 $(0, A)$

$t = 1$ 时 $y = 0$ 代入 $(1, 0)$

$$0 = A \cos(\omega + \pi)$$

$$\omega + \pi = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{2} \quad y = A \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \pi\right)$$

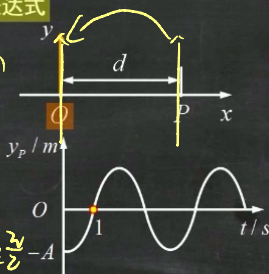
平衡位置在 O 点左侧, 逆时针转到 $\frac{3\pi}{2}$, 正的图像上

$$(2) T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi/2} = 4 \quad u = \frac{\lambda}{T} = \frac{\lambda}{4}$$

以 P 为原点:

$$y = A \cos\left[\frac{\pi}{2}\left(t + \frac{x}{\lambda/4}\right) + \pi\right] = A \cos\left[\frac{\pi}{2}\left(t + \frac{4x}{\lambda} + \pi\right)\right]$$

$$= A \cos\left[\frac{\pi}{2}\left(t + \frac{4(x-d)}{\lambda} + \pi\right)\right]$$



① 求原点振动方程

$$y = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

② 求波速 $u = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot \nu$

③ 带入公式:

$$y = A \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi_0\right]$$

$$\text{角频率: } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\text{周期: } T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\text{频率: } \nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

简谐振动: 机械能 = 动能 + 势能

简谐波: 动能 = 势能

波相干条件: 振动方向相同, 频率相同, 相位差恒定

$$\text{波1: } y_1 = A_1 \cos\left[\omega\left(t - \frac{r_1}{u}\right) + \varphi_1\right]$$

$$y_2 = A_2 \cos\left[\omega\left(t - \frac{r_2}{u}\right) + \varphi_2\right]$$

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 - \frac{2\pi(r_2 - r_1)}{\lambda} \begin{cases} \text{若 } = \pm 2k\pi & A = A_1 + A_2 \\ \text{相干加强} \\ \text{若 } = \pm (2k+1)\pi & A = |A_1 - A_2| \\ \text{相干减弱} \end{cases}$$

复习:

$$① L = n \times r = c \cdot \Delta t$$

$$② \Delta \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta L \quad (\lambda \text{ 是真空中波长})$$

杨氏双缝: $r_2 - r_1 = d \sin \theta = \begin{cases} k \frac{D}{d} \lambda & \text{明纹} \\ (2k+1) \frac{D}{d} \frac{\lambda}{2} & \text{暗纹} \end{cases}$

$\Delta x = \frac{D}{d} \lambda$

薄膜干涉: $\begin{cases} n_1 < n_2 < n_3 & \text{无半波} \\ n_1 > n_2 > n_3 & \text{无半波} \end{cases}$ 逆光或正光

薄膜干涉: $\begin{cases} n_1 < n_2 > n_3 \\ n_1 > n_2 < n_3 \end{cases}$ 有半波

反射光光程差 $\Delta = 2nh = 2ne + \frac{\lambda}{2} = (2k+1) \frac{\lambda}{2}$

垂直入射 $\Delta = 2n_2 d + \frac{\lambda}{2} \begin{cases} k\lambda, k=1,2,\dots & \text{加强} \\ (2k+1) \frac{\lambda}{2}, k=0,1,2 & \text{减弱} \end{cases}$

半波衍射:

逆光衍射, $\Delta d = \Delta n \frac{\lambda}{2}$

光栅:

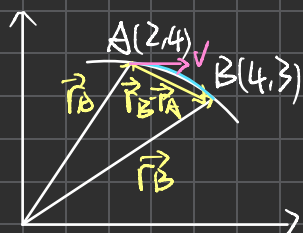
$d \sin \theta = p\lambda$ (光栅方程)

$\begin{cases} d \sin \theta < 2 \times 10^3 \sin \theta < \frac{\lambda}{d} \\ d \sin \theta = p\lambda, p \Rightarrow \frac{d \sin \theta}{\lambda} \end{cases}$

光学

大物上

1. 位置 / 速度 / 加速度



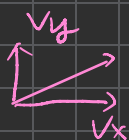
① 位矢 (位置矢量): $\vec{r}_A = 2\vec{i} + 4\vec{j}$
 $\vec{r}_B = 4\vec{i} + 3\vec{j}$

② 位移: $\Delta \vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$
 $= (4-2)\vec{i} + (3-4)\vec{j}$
 $= 2\vec{i} - \vec{j}$

③ 路程: $\widehat{AB}$ (弧长)

④ 速度: 平均速度 $\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_B - \vec{r}_A}{t_2 - t_1}$

瞬时速度 $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ (B无限趋近)



$v_{Ax} = \frac{dx}{dt}$ $v_{Ay} = \frac{dy}{dt}$

$\therefore \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j}$

大小: $|\vec{v}| = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2}$
 $= \frac{ds}{dt}$

⑤ 加速度

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j}$ (x, y 方向)
 $= \frac{dv}{dt}\vec{i} + \frac{v^2}{R}\vec{n}$ (切法向)

$|\vec{a}| = \left| \frac{d\vec{v}}{dt} \right| = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dt} \right)^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + \left(\frac{v^2}{R} \right)^2}$

2. $\vec{r} \rightarrow \vec{v} \rightarrow \vec{a}$ (阶递导)

$\vec{r} = (2t + 2t^2)\vec{i} + (\frac{1}{3}t^3 + t^2)\vec{j}$ 求 $t=2$ 时的速度和加速度

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j}$$

$$\begin{aligned} \vec{v} &= 4t\vec{i} + (t^2 + 2t)\vec{j} \quad | t=2 \\ &= 8\vec{i} + 6\vec{j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} \\ &= 4\vec{i} + 4t\vec{j} \quad | t=2 \\ &= 4\vec{i} + 8\vec{j} \end{aligned}$$

2. $\vec{r} \rightarrow \vec{v} \rightarrow \vec{a}$ 型

题2. 已知某质点的运动方程为 $x=2t$, $y=2-t^2$, 式中 x 以 m 计, t 以 s 计, 求:

- 1) 位置矢量表达式, 速度和加速度表达式;
- 2) 前 $2s$ 内质点的平均速度和平均加速度;
- 3) 第 $2s$ 内质点的平均速度;
- 4) 计算 $1s$ 末和 $2s$ 末质点的加速度。

解: (1) $\vec{r} = 2t\vec{i} + (2-t^2)\vec{j}$ $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 2\vec{i} - 2t\vec{j}$ $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -2\vec{j}$

(2) $t=0$ 时 $\vec{r}_0 = 2\vec{i}$ $\vec{v}_0 = 2\vec{i}$

$t=2$ 时 $\vec{r}_2 = 4\vec{i} - 2\vec{j}$ $\vec{v}_2 = 2\vec{i} - 4\vec{j}$

$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_0 = (4\vec{i} - 2\vec{j}) - 2\vec{i} = 2\vec{i} - 4\vec{j}$

$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{2\vec{i} - 4\vec{j}}{2-0} = \vec{i} - 2\vec{j}$

$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_0 = (2\vec{i} - 4\vec{j}) - 2\vec{i} = -4\vec{j}$

$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{-4\vec{j}}{2-0} = -2\vec{j}$

(3) $t=1$ 时 $\vec{r}_1 = 2\vec{i} + \vec{j}$

$t=2$ 时 $\vec{r}_2 = 4\vec{i} - 2\vec{j}$

$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = 2\vec{i} - 3\vec{j}$

$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{2\vec{i} - 3\vec{j}}{2-1} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$

4) $\vec{a} = -2\vec{j}$ 不随时间变化
'1s 时都限 -2j'

蜂考 bilibili

①位矢: $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$

②位移: $\Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$

③平均速度: $\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_B - \vec{r}_A}{t_2 - t_1}$

④速度: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j}$

大小: $|\vec{v}| = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} = \frac{ds}{dt}$

⑤加速度:

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} = \frac{dv}{dt}\vec{i} + \frac{v^2}{R}\vec{n}$

大小:

$|\vec{a}| = \left| \frac{d\vec{v}}{dt} \right| = \sqrt{\left(\frac{dv_x}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dv_y}{dt} \right)^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + \left(\frac{v^2}{R} \right)^2}$

蜂考 bilibili

3. $\vec{a} \rightarrow \vec{v} \rightarrow \vec{r}$ (连续积分)

3. $\vec{a} \rightarrow \vec{v} \rightarrow \vec{r}$ 型

蜂考 bilibili

题1. 设质点沿 x 轴作匀变速直线运动，加速度为 a 不随时间变化，初速度为 v_0 ，初位置为 x_0 ，试根据速度、加速度的定义求出该质点的速度公式和运动学方程。

解: $a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a dt \Rightarrow \int_{v_0}^v dv = \int_0^t a dt$ $a \rightarrow v$ 积分

同时代

解得: $v - v_0 = at \Rightarrow v = v_0 + at$

解题方法: 积分

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a dt \Rightarrow \int_{v_0}^v dv = \int_0^t a dt$$

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v dt \Rightarrow \int_{x_0}^x dx = \int_0^t v dt$$

匀变速直线运动:

$$v = v_0 + at$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a(x_2 - x_1)$$

$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v dt = (v_0 + at) dt \Rightarrow \int_{x_0}^x dx = \int_0^t (v_0 + at) dt$

$v \rightarrow r$ 积分

解得: $x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \Rightarrow x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$

3. $\vec{a} \rightarrow \vec{v} \rightarrow \vec{r}$ 型

蜂考 bilibili

题2. 一质点做直线运动，加速度 $a = 2m/s^2$ ，开始时 $v_1 = 2m/s$ ，一段时间后 $v_2 = 6m/s$ ，问质点在这段时间内的位移大小。

解: 由 $v_2^2 - v_1^2 = 2a(x_2 - x_1)$ $\Delta v^2 = 2as$

$$6^2 - 2^2 = 2 \times 2 \times (x_2 - x_1)$$

解题方法: 积分

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a dt \Rightarrow \int_{v_1}^{v_2} dv = \int_{t_1}^{t_2} a dt$$

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v dt \Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} dx = \int_{t_1}^{t_2} v dt$$

匀变速直线运动:

$$v = v_0 + at$$

3. $\vec{a} \rightarrow \vec{v} \rightarrow \vec{r}$ 型

蜂考 bilibili

题3. 质点沿直线运动，加速度 $a = 4 - t^2$ ，式中 a 的单位为 m/s^2 ， t 的单位为 s ，如果当 $t = 3s$ 时， $x = 9m$ ， $v = 2m/s$ ，求质点的运动方程。

解: $a = 4 - t^2 = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = (4 - t^2) dt \Rightarrow \int_{v_0}^v dv = \int_0^t (4 - t^2) dt$ $a \rightarrow v$ 积分

解题方法: 积分

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a dt \Rightarrow \int_{v_0}^v dv = \int_0^t a dt$$

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v dt \Rightarrow \int_{x_0}^x dx = \int_0^t v dt$$

匀变速直线运动:

$$v = v_0 + at$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a(x_2 - x_1)$$

解得: $v = v_0 + 4t - \frac{1}{3} t^3$ ①

$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v dt = (v_0 + 4t - \frac{1}{3} t^3) dt \Rightarrow \int_{x_0}^x dx = \int_0^t (v_0 + 4t - \frac{1}{3} t^3) dt$

$v \rightarrow r$ 积分

解得: $x = x_0 + v_0 t + 2t^2 - \frac{1}{12} t^4$ ②

$t = 3s$ $x = 9m$ $v = 2m/s$ 代入 ①② 得: $v_0 = -1m/s$ $x_0 = 0.75m$

所以质点的运动方程为: $x = 0.75 - t + 2t^2 - \frac{1}{12} t^4$ (m)

蜂考

3. $\vec{a} \rightarrow \vec{v} \rightarrow \vec{r}$ 型

蜂考 bilibili

题4. 一质点沿一直线运动, 其加速度为 $a = -2x$, 式中 x 的单位为 m , a 的单位为 m/s^2 。

试求该质点的速度 v 与位置坐标 x 之间的关系。设当 $x_0 = 1$ 时, $v_0 = 4m/s$ 。

解: $a = -2x = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot v$ $\frac{dv}{dx} \cdot v = -2x$

分离变量得: $v dv = -2x dx \Rightarrow \int_{v_0}^v v dv = \int_{x_0}^x -2x dx$

解得: $\frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} v_0^2 = -x^2 + x_0^2$

代入 $x_0 = 1$ $v_0 = 4 \Rightarrow \frac{1}{2} v^2 - 8 = -x^2 + 1$

$\Rightarrow v^2 = -2x^2 + 18$

解题方法: 积分

$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a dt \Rightarrow \int_{v_0}^v dv = \int_{t_0}^t a dt$

$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v dt \Rightarrow \int_{x_0}^x dx = \int_{t_0}^t v dt$

匀变速直线运动:

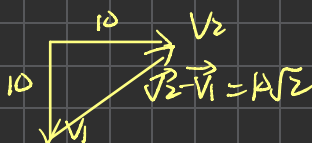
$v = v_0 + at$

$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$

$v_2^2 - v_1^2 = 2a(x_2 - x_1)$

4. 相对运动

1. 甲以 $V_1 = 10m/s$ 向南, 乙以 $V_2 = 10m/s$ 向东, 则甲船上的人观察乙船的速度大小为



相对关系

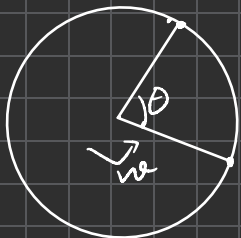
$\vec{V}_{绝对} = \vec{V}_{牵连} + \vec{V}_{相对}$

$\vec{a}_{绝对} = \vec{a}_{牵连} + \vec{a}_{相对}$

(牵连速度指参考系
绝对指地球)

$V_1 = \text{牵连}$
 $V_2 = \text{绝对}$

$V_{相对} = V_2 - V_1$
 $= 10\sqrt{2} m/s$



角位移: θ

rad

角速度: $\omega = \frac{d\theta}{dt}$

rad/s

角加速度: $\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$

rad/s²

周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$

2. $\theta \rightarrow \omega \rightarrow \beta$ (依次导)

2. $\theta \rightarrow \omega \rightarrow \beta$ 型

蜂考 bilibili

题1. 某质点上的角位置和时间关系为 $\theta = 4t - 6t^2 + 3t^3$ (SI), 则在2秒末的角速度大小 $\omega =$ _____, 角加速度大小 $\beta =$ _____, 在2秒末到4秒末这段时间内, 平均角速度大小 $\bar{\omega} =$ _____.

解题方法: 求导

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

解: $\omega = \frac{d\theta}{dt} = 4 - 12t + 9t^2 \Big|_{t=2} = 4 \text{ rad/s}$ ($\theta \rightarrow \omega, \beta$)

$\beta = \frac{d\omega}{dt} = -12 + 18t \Big|_{t=2} = 6 \text{ rad/s}^2$ ($\omega \rightarrow \beta, \theta$)

$t = 2s$ 时 $\theta_2 = 4$

$\Delta\theta = 32 - 4 = 28$

$t = 4s$ 时 $\theta_4 = 32$

$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{28}{4-2} = 14 \text{ rad/s}$

3. $\beta \rightarrow \omega \rightarrow \theta$ (依次积)

3. $\beta \rightarrow \omega \rightarrow \theta$ 型

蜂考 bilibili

题1. 已知匀变速圆周运动, 角加速度为 β , $t=0$ 时, 角速度为 ω_0 , 角位移为 θ_0 , 试用定义公式, 求角速度和角位移表达式。

解题方法: 积分:

解: $\beta = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow d\omega = \beta dt \Rightarrow \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t \beta dt$ ($\beta \rightarrow \omega, \theta$)

$\beta = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow d\omega = \beta dt \Rightarrow \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t \beta dt$

解得: $\omega - \omega_0 = \beta t \Rightarrow \omega = \omega_0 + \beta t$

$\omega = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow d\theta = \omega dt \Rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_0^t \omega dt$

$\omega = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow d\theta = \omega dt = (\omega_0 + \beta t) dt \Rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_0^t (\omega_0 + \beta t) dt$ ($\omega \rightarrow \theta, \beta$)

匀变速圆周运动:

解得: $\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2} \beta t^2 \Rightarrow \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \beta t^2$

$\omega = \omega_0 + \beta t$

$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \beta t^2$

$\omega_2^2 - \omega_1^2 = 2\beta(\theta_2 - \theta_1)$

3. $\vec{\beta} \rightarrow \vec{\omega} \rightarrow \vec{\theta}$ 型

蜂考 bilibili

题2. 搅拌机叶片以恒定角加速度 1.50 rad/s^2 转动, 求:

- (1) 从静止启动后经过多少时间角速度将达到 36.0 rad/s ?
- (2) 在此时间内共转过多少转?

解: (1) 由 $\omega = \omega_0 + \beta t$ 得

$$36 = 0 + 1.5t \Rightarrow t = 24 \text{ s}$$

$$(2) \text{ 由 } \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \beta t^2 = 0 + 0 + \frac{1}{2} \times 1.5 \times 24^2 = 432 \text{ rad}$$

$$n = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{432}{2 \times 3.14} = 68.8 \text{ (转)}$$

解题方法: 积分:

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow d\omega = \beta dt \Rightarrow \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_{t_0}^t \beta dt$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow d\theta = \omega dt \Rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^t \omega dt$$

匀变速圆周运动:

$$\omega = \omega_0 + \beta t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \beta t^2$$

$$\omega_2^2 - \omega_1^2 = 2\beta(\theta_2 - \theta_1)$$

3. $\vec{\beta} \rightarrow \vec{\omega} \rightarrow \vec{\theta}$ 型

蜂考 bilibili

题3. 绕定轴转动的飞轮, 均匀减速, $t=0$ 时 $\omega_0 = 5 \text{ rad/s}$, $t=20$ 时 $\omega = 0.8\omega_0$

则飞轮的角加速度 $\beta = \underline{\hspace{1cm}} \text{ rad/s}^2$, 转过的角度 $\theta = \underline{\hspace{1cm}} \text{ rad}$.

解: 依题意知 $t=0$ $\omega_0 = 5$ $t=20$ $\omega = 0.8\omega_0 = 4$

由 $\omega = \omega_0 + \beta t$

$$4 = 5 + \beta \times 20 \Rightarrow \beta = -0.05 \text{ rad/s}^2$$

由 $\omega^2 - \omega_0^2 = 2 \cdot \beta \cdot \Delta\theta$

$$\Rightarrow \Delta\theta = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\beta}$$

解题方法: 积分:

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow d\omega = \beta dt \Rightarrow \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_{t_0}^t \beta dt$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow d\theta = \omega dt \Rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^t \omega dt$$

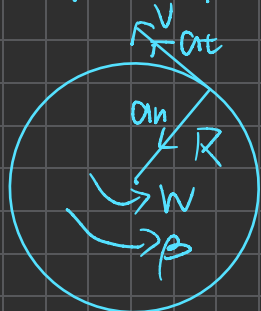
匀变速圆周运动:

$$\omega = \omega_0 + \beta t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \beta t^2$$

$$\omega_2^2 - \omega_1^2 = 2\beta(\theta_2 - \theta_1)$$

4. 角量与线量关系



$$v = \omega R$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \beta R$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

4. 角量与线量关系

已知 $\omega \rightarrow v \rightarrow \beta$ (同时)

题2. 质点沿半径为 R 的圆周运动, 运动学方程为 $\theta = 3 + 2t^2$ (SI), 则 t 时刻

质点的法向加速度大小为 $a_n =$, 切向加速度 $a_t =$. 角量与线量关系:

解: $\omega = \frac{d\theta}{dt} = 4t$ $\beta = \frac{d\omega}{dt} = 4$

$a_n = \frac{dv}{dt} = \frac{d\omega R}{dt} = \beta R$

$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R}$

$v = \omega R$

$a_t = \beta \cdot R$

$a_n = \omega^2 R$

$a_n = \omega^2 R = (4t)^2 R = 16Rt^2$

4. 角量与线量关系

指

题3. 一质点在半径为 $0.1m$ 的圆周上运动, 其角位置变化关系为 $\theta = 2 + 4t^3$ (rad)。问:

(1) 在 $t=2s$ 时, 质点的法向加速度和切向加速度大小各为多少?

(2) 当切向加速度大小恰等于总加速度大小的一半时, θ 值为多少?

(3) 在什么时刻, 切向加速度和法向加速度恰好大小相等?

角量与线量关系:

$v = \omega R$

$a_t = \beta \cdot R$

$a_n = \omega^2 R$

解: (1) $\omega = \frac{d\theta}{dt} = 12t^2$ $\beta = \frac{d\omega}{dt} = 24t$ 指完得 ω, β 代入

法向加速度: $a_n = \omega^2 R = (12t^2)^2 \times 0.1 = 14.4t^4 \Big|_{t=2} = 230.4 \text{ m/s}^2$

切向加速度: $a_t = \beta R = 24t \times 0.1 = 2.4t \Big|_{t=2} = 4.8 \text{ m/s}^2$

(2) $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{(14.4t^4)^2 + (2.4t)^2}$

依题意: $a_t = \frac{1}{2}a \Rightarrow 2.4t = \frac{1}{2}\sqrt{(14.4t^4)^2 + (2.4t)^2} \Rightarrow t^3 = \frac{\sqrt{3}}{6} \Rightarrow \theta = 2 + 4t^3 = 2 + 4 \times \frac{\sqrt{3}}{6} = 3.15(\text{rad})$

(3) 依题意 $a_t = a_n \Rightarrow 2.4t = 14.4t^4$ 解得: $t = 0.55s$

牛顿运动定律

一. 牛三

① 第一定律：任何物体都保持静止或匀速直线运动状态，直到受其他物体作用改变它的运动状态。

(力来源于物体间相互作用，力的效果是改变运动状态 [不是维持运动])

[惯性：维持运动的是惯性，改变运动的是力]

惯性参考系：第一定律在惯性系成立。静止或匀速直线运动的参考系都是惯性系。

② 第二定律： $F=ma$ 的本质： $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ (动量方程)

低速情形： $\vec{F} = m\vec{a}$ $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ 力 = 动量对时间的变化率

第二定律也只能用于惯性系。

质量是惯性的量度—— m 越大，越难改变运动状态。

多个力作用时，合力等于 ma ： $F_1 + F_2 + \dots + F_N = ma$ (矢量叠加)

自然坐标下的牛二

圆周运动中 $F_t(\text{切向}) = ma_t = m \frac{dv}{dt}$ 切向力 (改变 v)

$F_n(\text{法向}) = ma_n = m \frac{v^2}{R}$ 法向力 (改变 v 方向)

③ 第三定律：作用力与反作用力

$F = -F'$ 作用在两个不同物体上，大小相等方向相反

F 与 F' 性质相同 (都是磁力或引力...)

F 与 F' 同时产生同时消失

F 与 F' 作用在不同物体上——不是一对平衡力

两个力
作用同一
个物体

解题四步法:

- ① 定: 定研究对象——两个物体连一起固商内
- ② 画: 画受力分析图——轻重→弹→摩擦、力顺序
- ③ 列: 列方程——建坐标系 用牛二 $F=ma$ 列方程
- ④ 求解

三类力学:

- | | | | |
|------------|-----------------------|--------------|------------------------------|
| 1. 已知力→求运动 | 已知 $F(t), F(v), F(x)$ | 求 v_t, x_t | 思路 用 $F=ma \rightarrow a$ 求解 |
| 2. 已知运动→求力 | $r(t)$ 或 $v(t)$ | F | 求两次身倍 0.001m |
| 3. 综合 | | | 联立 |

变力问题

★★ 变力问题 (大物对高中的最大升级)

高中只学过恒力和“分阶段恒力”。大物里你必须会变力。

例: 题 4: 质点在某高度水平抛出, 受阻力 $f = -kv$ (与速度反向, 大小成正比)。求质点运动的微分方程。

思路: 受力 = 重力 + 阻力, 对每个方向写 $F = ma$:

x 方向: 受力只有阻力 $-k \cdot v_x = -k \cdot (dx/dt)$

Code

$$m \cdot (d^2x/dt^2) = -k \cdot (dx/dt)$$

y 方向: 重力 $-mg$ + 阻力 $-k \cdot v_y = -mg - k \cdot (dy/dt)$ (注意阻力 y 分量方向)

Code

$$m \cdot (d^2y/dt^2) = -mg - k \cdot (dy/dt)$$

答案选 A。

Thinking

【情况1】F 是 t 的函数

Code

$$v = v_0 + \int_0^t a(t') dt'$$
$$x = x_0 + \int_0^t v(t') dt'$$

【情况2】F 是 v 的函数 (最常考! 子弹入沙、下落带阻力)

Code

$$F(v) = m \cdot dv/dt$$

分离变量: $m \cdot dv/F(v) = dt$

两边积分: 得到 t 与 v 的关系

【情况3】F 是 x 的函数 (弹簧、引力):

Code

$$F(x) = m \cdot a = m \cdot v \cdot (dv/dx) \quad \leftarrow \text{用这个变换!}$$

分离变量: $m \cdot v \cdot dv = F(x) \cdot dx$

两边积分: 得到 v 与 x 的关系

Reply to Claude

+

🔊

🔊

动量定理与动量守恒

1. 动量

$$\text{动量 } \vec{p} = m\vec{v} \text{ (状态量)}$$

矢量, 方向和速度同向

是瞬间的——描述在某一时刻运动状态

2. 冲量

$\vec{I}$: 力在一段时间内的累积作用

$$\text{恒力: } \vec{I} = \vec{F} \Delta t$$

$$\text{变力: } \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} dt$$

$$\text{按分量: } I_x = \int F_x dt$$

$$I_y = \int F_y dt$$

3. 动量定理

$$\vec{I} = \Delta \vec{p} = m\vec{v} - m\vec{v}_0 \quad \text{或} \quad \int \vec{F} dt = m\vec{v} - m\vec{v}_0$$

合外力的冲量 = 动量的变化量

$$\text{分量: } I_x = mV_x - mV_{0x} \quad \text{某方向的冲量只改变该方向的动量}$$

$$I_y = mV_y - mV_{0y}$$

动量守恒定律 (只有外力才能改变系统总动量)

$$\int F_{\text{外}} dt = \Delta \vec{p}_{\text{系统}} = \sum m_i v_i - \sum m_i v_0$$

动量守恒三种条件

① $F_{\text{外}} = 0$ 系统总动量守恒

② $F_{\text{外}} \neq 0$ 但 $|F_{\text{外}}| \ll |F_{\text{内}}|$ 系统总动量近似守恒

eg: 碰撞, 爆炸, 子弹打物体

③ $F_{\text{外}} \neq 0$ 但某方向 $F_{\text{合}} = 0$ 则该方向上动量守恒

eg: 人船问题

必须会的两个母题

模板 A: 子弹打物体 (嵌入 / 穿透)

嵌入式 (完全非弹性碰撞):

Code

$$m \cdot v_0 = (m + M) \cdot V$$

子弹和物体合并为一体, 只用动量守恒。

穿透式 (子弹穿过物体):

Code

$$m \cdot v_0 = m \cdot v + M \cdot V$$

两个未知 (v 、 V) 需要题目额外信息 (比如题目告诉穿出后子弹速度)。

⚠ 机械能不守恒! 穿透或嵌入都有动能损失 (变热)。



模板 B: 人船问题

条件:

1. 系统 (人 + 船) 初始静止
2. 水平无外力 (光滑水面)

核心方程 (水平动量守恒):

Code

$$m \cdot v_{\text{人}} + M \cdot v_{\text{船}} = 0 \quad (\text{任意时刻})$$
$$\text{积分得位移关系: } m \cdot s_{\text{人}} = M \cdot s_{\text{船}} \quad (\text{人和船相对地面的位移})$$

几何约束: 人和船相对地面的位移之和 = 人在船上走过的距离 L (人在船头到船尾的距离):

Code

$$s_{\text{人}} + s_{\text{船}} = L$$

联立解出 $s_{\text{船}} = mL/(m+M)$ 。



功、能、机械能

功与功率定理

恒力做功: $W = F s \cos \theta$ (F 与 s 夹角 θ)

变力做功: $W = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r}$

单位: 焦耳 $J = N \cdot m$

特点(即强调)

① 标量 但有正负号 ($\cos \theta > 0$ 正功, $\cos \theta < 0$ 负功)

② 过程量 (看路径, 不看初末位置)

③ 相对量 (不同参考系下功不一样)

2. 几种典型力的功

重力做功: $W_{\text{重}} = -mg\Delta y$ ^{$\leftarrow$ 向上位移}
 $= mgh$ ^{$\leftarrow$ 向下位移}

弹簧弹力做功: $W_{\text{弹}} = -\int_{x_1}^{x_2} kx dx$

弹簧拉长时弹力做负功 $= -\frac{1}{2}k(x^2 - x_1^2)$

摩擦力做功: $W_f = -fs$ (s 是路程, 不是位移)

摩擦力方向永远与运动方向相反所以永远做负功

3. 动能定理

$$W_{\text{合}} = \Delta E_k = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2$$

合外力做的功 = 动能的变化

4. 质点系的动能定理

$$W_{\text{外}} + W_{\text{内}} = \Delta E_{k\text{总}}$$

(质点系内内力做功不为0, 比如两个物体之间的弹簧弹力是内力, 它能改变两物体的动能)

保守力与势能

① 保守力 VS 非保守力

保守力: 做功只与始末位置有关, 与路径无关

(即沿闭合路径做的功=0)

例子: 重力、弹簧弹力、万有引力、静电力

非保守力: 做功与路径有关

例子: 摩擦力、空气阻力

势能: 只有保守力才有势能。势能是属于系统的 (不是单个质点的)

$$W_{\text{保}} = -\Delta E_p = E_p(\text{始}) - E_p(\text{终})$$

三解必背势能公式

① 重力势能 $E_p = mgy$

② 弹性势能 $E_p = \frac{1}{2} kx^2$

③ 万有引力势能 $E_p = -GMm/r$

势能零点

取 $y_0 = 0$

弹簧伸长 $x=0$

无穷远 $r \rightarrow \infty$

符号

零点上 $W > 0$ 下 $W < 0$

弹性 ≥ 0

引力 ≤ 0

功能原理与机械能守恒

1. 机械能

$$E = E_k + E_p \quad (\text{动能} + \text{势能})$$

注意势能要看选定的零点

2. 功能原理

$$W_{\text{外}} + W_{\text{内非}} = \Delta E = E_{\text{末}} - E_{\text{初}}$$

外力 + 内部非保守力 做的总功 = 机械能的变化

为什么不算保守内力，因为保守内力已经体现在势能里了

算什么力的功

动能定理

所有外力(保+非保)

功能原理

只算外力 + 内部非保守力

等于什么变化

动能 ΔE_k

机械能 $\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_p$

机械能守恒

$$W_{\text{外}} + W_{\text{内非保}} = 0$$

最常见的守恒：①系统只受保守力(重力，弹力，万有引力)

②有非保守力但不做功(eg: 绳子拉力垂直运动)

守恒方程： $E_{k\text{初}} + E_{p\text{初}} = E_{k\text{末}} + E_{p\text{末}}$

判断套路：

有摩擦力或阻力 $\rightarrow$ 机械能不守恒，用功能原理

只有重力、弹力 $\rightarrow$ 机械能守恒

有绳子约束但绳子不伸长 $\rightarrow$ 拉力 $W = 0$ ，可能守恒

§3.7 (后半) 碰撞 ★★★ (必考!)

三类碰撞对比表

碰撞类型	动量	动能	例子
弹性碰撞	守恒 ✓	守恒 ✓	钢球之间
非弹性碰撞	守恒 ✓	不守恒 (部分丢失)	一般碰撞
完全非弹性碰撞	守恒 ✓	损失最大 (粘在一起)	子弹嵌入

原子级碰撞

人船, 粘土

关键: 所有碰撞动量都守恒 (因为接触时间短, 外力冲量可忽略)。区别在动能。

子弹打物体 (穿透) + 1 artifact

典型题型 (你的题 7): 子弹打入木块 → 弹簧被压缩 → 求最大压缩量

分两步处理:

第一步: 子弹与木块碰撞 (极短时间) —— 动量守恒, 动能不守恒

Code



$$\begin{aligned} m \cdot v_0 &= (m + M) \cdot V \\ V &= m \cdot v_0 / (m + M) \end{aligned}$$

第二步: 合体后压缩弹簧 (无摩擦, 机械能守恒)

Code



$$\begin{aligned} (1/2)(m+M) \cdot V^2 &= (1/2)k \cdot x_{\max}^2 \\ x_{\max} &= V \cdot \sqrt{(m+M)/k} = (m \cdot v_0) / (m+M) \cdot \sqrt{(m+M)/k} = \dots \end{aligned}$$

⚠ 千万不能直接对整个过程用机械能守恒! 第一步碰撞有动能损失。要分两步。

刚体定轴转动

		单位	对应线量
角位移 θ	转过角位移	rad (弧度)	位移 x
角速度 ω	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$	rad/s	速度 v
角加速度	β	rad/s ²	加速度 a

2. 角量与线量关系

刚体上距转轴 R 外某点

$$v = \omega R \quad (v_{\text{线}} = v_{\text{角}} \times \text{半径})$$

$$\frac{dv}{dt} = a_{\text{切}} = \beta R \quad (\text{切向加速度})$$

$$\frac{v^2}{R} = a_{\text{法}} = \omega^2 R \quad (\text{法向加速度})$$

$$a_{\text{切}} = \frac{dv}{dt}$$

$$a_{\text{法}} = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

3. 匀变速转动公式 (直接对应直线运动)

3. 匀变速转动公式 (直接对应直线运动)

直线运动

转动

$$v = v_0 + at$$

$$\omega = \omega_0 + \beta t$$

$$x = v_0 t + (1/2)at^2$$

$$\theta = \omega_0 t + (1/2)\beta t^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2ax$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\beta\theta$$

三. 力矩

描述 力让物体转动的能力

$$M = r \times F \quad (\text{叉乘, 矢量})$$

$$\text{大小: } M = F r \sin\theta = F d \quad (d \text{ 为力臂})$$

力臂 d = 从转轴到力作用线的垂直距离

力的作用线过转轴时, $d=0 \rightarrow M=0$ (这种力不引起转动)

力的方向垂直于位矢时, $M=Fr$ (最大)

M 是矢量 沿转轴方向

☆ 四. 转动惯量 J ☆

1. 概念: 转动惯量是“刚体抵抗转动状态变化的能力”
类比质量

定义: $J = \sum m_i \cdot r_i^2$ (离散)

$J = \int r^2 dm$ (连续, r 是质量元到转轴距离)

2. 必背的几个 J 公式 ★★★★★

刚体	转轴位置	J
细棒 (长 l)	过中心 $\perp$ 棒	$(1/12) \cdot m \cdot l^2$
细棒 (长 l)	过端点 $\perp$ 棒	$(1/3) \cdot m \cdot l^2$
薄圆盘 (半径 R)	过盘心 $\perp$ 盘面	$(1/2) \cdot m \cdot R^2$
薄圆环 (半径 R)	过环心 $\perp$ 环面	$m \cdot R^2$
实心球 (半径 R)	过球心	$(2/5) \cdot m \cdot R^2$
薄球壳 (半径 R)	过球心	$(2/3) \cdot m \cdot R^2$

$$\begin{aligned} \frac{1}{12} ml^2 \\ \frac{1}{3} ml^2 \\ \frac{1}{2} m R^2 \end{aligned}$$

平行轴定理

如果绕“非过质心”的轴转, J 比过质心时大:

$$J = J_c + m d^2 \quad \text{新轴与质心轴距离}$$

过质心的转动惯量

eg: 细棒对 J

$$J = J_c + m d^2 = \frac{1}{12} ml^2 + m \left(\frac{1}{2} l \right)^2 = \frac{1}{12} ml^2 + \frac{1}{3} ml^2 = \frac{1}{2} ml^2$$

转动定律: $M = J\beta$ (力矩 = 转动惯量 $\times$ 角加速度)

($F = ma$ 的转动版本)

$F \leftrightarrow$ 力矩 M

$m \leftrightarrow$ 转动惯量 J

加速度 $a \leftrightarrow$ 角加速度 β

经典题型: 滑轮 + 两物体 (必考)

设滑轮半径 R 、转动惯量 J , 两侧物体质量 m_1 和 m_2 ($m_1 > m_2$)。

三个方程联立:

1. 物体 m_1 : $m_1g - T_1 = m_1a$ (沿绳方向, 向下)

2. 物体 m_2 : $T_2 - m_2g = m_2a$ (向上)

3. 滑轮: $T_1 \cdot R - T_2 \cdot R = J\beta$

4. 约束: $a = R\beta$ (绳不打滑)

代入消元得 a 和 T 。

为什么 $T_1 \neq T_2$? 因为滑轮有质量 (有 J) , 需要净力矩才能转动。当滑轮质量为零时, $J = 0 \rightarrow T_1 = T_2$ 。

角动量与守恒

1. 角动量: $L = r \times mv$ 大小 = $mvr \sin\theta$

对圆周运动: $L = mvr$ ($v \perp r$)

对直线运动: $L = mvd$ (d 是直线到原点的垂直距离)

刚体: $L = J\omega$

[类似 $p = mv$ 但注意是对某一固定轴而言]

角动量守恒: 对转轴的外力矩 = 0

结论: $L = J\omega = \text{常数}$

转动动能: $E_k = \frac{1}{2} J \omega^2$

力矩做功: $W = \int M d\theta$

刚体动能定理: $W = \Delta E_k = \frac{1}{2} J \omega^2 - \frac{1}{2} J \omega_0^2$

合刚体机械能守恒: $E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \omega^2 + mgh_{质心} + mgh_{质心}$

静电场

一. 库仑定律与电场强度

库仑定律: $F = \frac{kq_1q_2}{r^2}$ (其中 $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$)

电场强度: $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$ (q_0 是试探电荷)

点电荷场

$$\vec{E} = \frac{kq}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (\text{正电荷向外, 负电荷向内})$$

(E 是矢量! 计算各个电荷场用矢量叠加, 不能直接加大小)

二. 几种特殊场

带电体

电场强度

适用范围

无限长带电直线

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

r 是到直线的距离

无限带电平面 (面密度 σ)

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

两侧均匀, 方向垂直面

带电圆环 (轴线上)

$$E = \frac{kQx}{(r^2 + x^2)^{3/2}}$$

x 是轴线坐标

圆心 (圆环或对称)

$$E = 0$$

对称抵消

三. 计算电场的两种神器

1. 直接积分 (点电荷叠加)

$$\vec{E} = \int k dP \cdot \frac{\vec{r}}{r^2} \quad (dP: \text{电荷元})$$

2. 高斯定理

1. 电通量: $\Phi_e = \int \vec{E} \cdot d\vec{S}$ (电场线穿过曲面条数)

2. 高斯定理: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum q_{in}}{\epsilon_0}$

Φ_e 取决于面内电荷代数和
但面上 E 受所有电荷影响 (包括面外)

3类对称应用模版

1. 球对称 (点电荷, 带电球面, 带电球体)

$$4\pi r^2 E = \frac{\sum q_{\text{内}}}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\sum q_{\text{内}}}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

2. 柱对称 (无限长带电直线, 带电柱面)

$$2\pi r L \cdot E = \frac{\Delta l}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r}$$

3. 面对称 (无限大带电平面, 平板)

$$2EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

电势与电势

$$W_{pq} = q \cdot V \quad (q \text{ 在某点电势} = q \times \text{该点电势})$$

$$V_p = \int_p^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (\text{从 } p \text{ 到无穷远的线积分, 零点在无穷远})$$

电场力做功

$$W_{AB} = q (V_A - V_B) \quad \text{正电荷从 } A \rightarrow B \text{ 电场力做功}$$

电势公式

点电荷

$$V = \frac{kq}{r}$$

零点在无穷远

均匀带电球面 (半径 R)

$$r > R: V = \frac{kQ}{r}$$

$$r < R: V = \frac{kQ}{R} \text{ (恒定)}$$

球面内电势 = 球面上电势

均匀带电球体

$$r > R: V = \frac{kQ}{r}$$

$$r < R: V = \frac{kQ}{2R} \cdot \frac{3-R^2}{R^2}$$

球内 V 不恒定

无限带电直线

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \ln r + C$$

零点不能选无穷远

电势叠加 (标量直加)

$$V_{\text{总}} = V_1 + V_2 + \dots + V_N$$

$$E = -\frac{dV}{dl} \quad (E \text{ 指向 } V \text{ 减小最快方向})$$

静电场中的导体

一、静电平衡

导体放入电场 $\rightarrow$ 自由电子排列 $\rightarrow$ 直到导体内部 $E=0$
排列停止

静电平衡四条规律: ① 导体内部 $E_{内}=0$

② 导体是等势体, 表面是等势面

③ 导体表面 E 垂直于表面, 大小 $E_{表} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

④ 净电荷只能分布在导体外表面
(内部体电荷密度 $=0$)

无限带电极板
是 $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ (两面)

二、导体壳问题

二、导体壳问题 (真题原型 大雾 东)

这是同心球壳大题的核心套路:

情形 A: 导体壳内放一个电荷 $+q$, 导体壳本身带电 Q

Code

内表面: 感应出 $-q$ (屏蔽内部电荷)
外表面: $+Q + q$



情形 B: 导体壳接地

Code

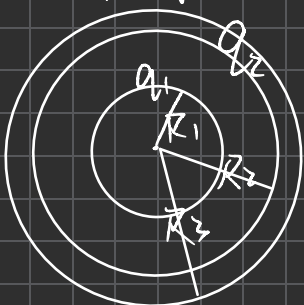
外表面电荷 $= 0$ (电荷被引向大地)
内表面仍为 $-q$



静电屏蔽: 导体壳屏蔽的是电场, 不屏蔽电势——这点非常重要, 球壳大题里经常用到: “屏蔽” 内外互不影响”指的是 E , 不是 V 。

三、同心球壳和电势分布

内球壳: R_1 带电 q_1 , 外球壳 R_2 (内) R_3 (外) 带电 q_2



E : $r < R_1$ $E = 0$ (内球壳内)

$R_1 < r < R_2$: $E = \frac{q_1}{4\pi r^2 \epsilon_0}$

$R_2 < r < R_3$: $E = 0$ (导体壳内)

$r > R_3$: $E = \frac{q_1}{4\pi r^2 \epsilon_0} + \frac{q_2}{4\pi r^2 \epsilon_0} = \frac{q_1 + q_2}{4\pi \epsilon_0 r^2}$

$r < R_1, E = 0$
 $V \neq 0$

V : $r < R_1$: $V = \frac{q_1}{4\pi \epsilon_0 R_1} - \frac{q_1}{4\pi \epsilon_0 R_2} + \frac{q_1 + q_2}{4\pi \epsilon_0 R_3}$

$R_1 < r < R_2$: $V = \frac{q_1}{4\pi \epsilon_0 r} - \frac{q_1}{4\pi \epsilon_0 R_2} + \frac{q_1 + q_2}{4\pi \epsilon_0 R_3}$

$R_2 < r < R_3$: $V = \frac{q_1 + q_2}{4\pi \epsilon_0 R_3}$ (导体壳内电势)

$r > R_3$: $V = \frac{q_1 + q_2}{4\pi \epsilon_0 r}$

核心技巧: 电势用叠加法——某点电势 = 所有电荷在该点产生的电势之和。导体壳内外两面就当两个均匀带电球面分别贡献。

外球壳是导体必须满足静电平衡 (内 $E = 0$)

∴ 外球壳内表面 $R_2 \rightarrow$ 感应出 $-q_1$

外球壳外表面 $R_3 \rightarrow$ 剩下 $q_2 - (-q_1) = q_2 + q_1$

静电场中电介质

一、极化机制（理解即可，不考计算）

Code

无极分子 $\rightarrow$ 位移极化（电荷中心错开）

有极分子 $\rightarrow$ 取向极化（偶极子转向）

共同结果：介质表面出现束缚电荷 σ'

(ϵ_r 相对电容率
相对介电常数)

ϵ_r : 介质比真空
装电荷能力强一倍

真空中 $\epsilon_r = 1$
介质中 $\epsilon_r > 1$

(ϵ_0 : 真空电容率)

$\epsilon_r \epsilon_0$: 绝对电容率

二、电极化强度

电极化强度 $P = \epsilon_0 \chi_e E = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) E$

束缚电荷面密度: $\sigma' = P \cdot \vec{n}$ (法向投影)

均匀场垂直入射时: $\sigma' = P = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) E$
 $\vec{n} = 1$

介质中电场 $E = \frac{E_0}{\epsilon_r}$ (E_0 真空)

三、电位移矢量 D 和有介质的的高斯定理 ★★★

Code

定义: $D = \epsilon_0 E + P = \epsilon_0 \epsilon_r E$

$$D = \epsilon_0 E + P = \epsilon_0 E + \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) E$$

有介质高斯定理: $\oint D \cdot dS = \sum q_{\text{自由}} (\text{内部})$

⚠ 核心要点: D 的高斯定理右边只算自由电荷, 不算束缚电荷! 这是 D 比 E 好用的根本原因——做题时先求 D, 再用 $E = D / (\epsilon_0 \epsilon_r)$ 反推 E。

解题流程: ① 由对称性 + D 的高斯定理 $\rightarrow$ 求 D

② $E = \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_r}$

③ $\sigma' = P \cdot \vec{n} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) E$

④ 若求 V, 用 $V = \int E dl$

电容、电容器

一、基本公式

电容定义: $C = \frac{Q}{U_{AB}}$, $1F = 10^6 \mu F = 10^{12} pF$

关键: C 只与几何形状和介质有关

与 U 无关, 电源拔掉后改变几何或介质, C 变, Q 或 U 也变

二、三种基本电容器

平行板: $C = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 S}{d}$

球形 (同心两球壳)

$$C = \frac{4\pi \epsilon_r \epsilon_0 \cdot R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

孤立金属球 (外充满介质)

$$C = 4\pi \epsilon_0 \epsilon_r R$$

柱形 (同轴) $C = \frac{2\pi \epsilon_r \epsilon_0 L}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$

$$E = \frac{U}{d} = \frac{E_0}{\epsilon_r}$$

$$Q = CU = \epsilon_r Q_0$$

$$U = \frac{Q}{C} = \frac{U_0}{\epsilon_r}$$

三、串并联

串: $\frac{1}{C_{总}} = \sum \frac{1}{C_i}$

(电荷相同, 电压分配)

并: $C_{总} = \sum C_i$

(电压相同, 电荷分配)

△ U 不变 VS Q 不变

情形

哪个量不变

(U 变 ϵ_r)

C 变化

E 变化

接着电源 (U 不变)

U

$C \rightarrow \epsilon_r C$ (增大)

$E = \frac{U}{d}$ 不变

$Q \uparrow$
 $Q = CU$ 增大

断开电源 (Q 不变)

Q

$C \rightarrow \epsilon_r C$ (增大)

$$U = \frac{Q}{C} = \frac{U_0}{\epsilon_r} \downarrow$$

$E = \frac{E_0}{\epsilon_r}$ 减小

U 不变

五、半空间插入电介质 = 并联（不是串联！）

如果只在平板电容器水平方向插入一半（电介质和真空各占面积 $S/2$ ）：

Code

```
左半边  $C_1 = \epsilon_r \epsilon_0 (S/2)/d$   
右半边  $C_2 = \epsilon_0 (S/2)/d$   
总电容 =  $C_1 + C_2$ （并联，因为电压相同）
```

如果是竖直方向叠层（介质厚 b ，真空厚 $d-b$ ）：

Code

```
两层电压不同，电荷相同 → 串联  
 $1/C_{\text{总}} = b/(\epsilon_r \epsilon_0 S) + (d-b)/(\epsilon_0 S)$ 
```

⚠ 常见错误：水平插入硬当串联做，结果错一半。判断标准：
电压相同 = 并联；电荷相同 = 串联。

§6.4 静电场能量与能量密度

一、电容器储能（三个等价公式，按方便选）

Code

```
 $W = (1/2) C U^2$   
 $W = (1/2) Q U$   
 $W = Q^2/(2C)$ 
```

🔑 辨析两种情形的能量变化（接续上面的表）：

- 接电源插介质： $W = (1/2) C U^2$ ， C 变大， U 不变 → W 增大（电源做正功）
- 断电源插介质： $W = Q^2/(2C)$ ， Q 不变， C 变大 → W 减小（介质被吸进去，电场对介质做正功）

二、能量密度 w_e

$w_e = \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} E D \quad (J/m^3, \text{电场的能量密度})$
总能量 $W = \int w_e dV$

三、对称场的体积元（必背）

Code



球对称: $dV = 4\pi r^2 dr$

柱对称: $dV = 2\pi r L dr$

面对称: $dV = S dx$

🔑 典型题型：用积分法计算同心球壳之间的电场能量（与电容公式互相验证）。

Code



$$\begin{aligned} W &= \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \cdot 4\pi r^2 dr \\ &= \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2} \epsilon_0 \left[\frac{Q}{(4\pi \epsilon_0 r^2)} \right]^2 \cdot 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{Q^2}{(8\pi \epsilon_0)} \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \\ &= \frac{Q^2}{(2C)} \quad \checkmark \end{aligned}$$