

离散数学总复习

2025.12.12

题型介绍

- 填空题 $2''*10$
- 判断题 $2''*10$
- 解答题 $10''*4$
- 证明题 $10''*2$

集合与关系

- 集合、元素、列举法、描述法；属于、子集、集合相等、真子集、空集、 n 元集、 m 元子集、单元集；幂集 $P(A)$ 、全集
- 交、并、相对补 $A-B$ 、绝对补 $\sim A=E-A$ 、对称差 $A\oplus B$ ；集族、广义并/交、一类(元)运算、二类(元)运算
- 序偶（有序对）、笛卡尔积 $A\times B$
- A 到 B/A 上的二元关系（关系） R （ $\langle x, y \rangle \in R / xRy$ ）、 A 上的空/全域/恒等关系、关系矩阵、关系图
- 定义域、值域、域、 R 的逆 R^{-1} 、 F 和 G 的复合、 R 在 A 上的限制 $R \upharpoonright A$ 、 A 在 R 下的像 $R[A]$ 、 A 上关系 R 的 n 次幂 R^n （ $R^0 = I_A$ ）、自反/反自反/对称/反对称/传递关系、自反/对称/传递闭包

集合与关系

- 非空集合 A 上的等价关系 R ($x \sim y$, 自反、对称、传递)、模 n 同余关系、 x 关于 R 的等价类 $[x]_R$ 、 A 关于 R 的商集 A/R 、 A 上的划分
- 非空集合 A 上的偏序关系 R ($x \leq y$, 自反、反对称、传递); 可比、不可比、全序关系/线序关系、偏序集; 覆盖、哈斯图、任意子集 B 的八类元素
 - 极大/小元: B 中在哈斯图中最上/下层的元素
 - 最大/小元: B 中在哈斯图中最上/下层的唯一元素
 - 上/下界: A 中比子集 B 中所有元素都高/低的元素 (包括 B 的最大/小元)
 - 上确界: 所有上界所构成子集中的最小元
 - 下确界: 所有下界所构成子集中的最大元

Ch2 习题讲解

2.47 $A=\{1, 2, \dots, 12\}$, $\leq$ 为整除关系, 画出其哈斯图并在偏序集 $\langle A, \leq \rangle$ 中求子集 $B=\{x \mid x \in A, 2 \leq x \leq 4\}$ 的极大元、极小元、最大元、最小元、上界、下界、最小上界和最大下界。

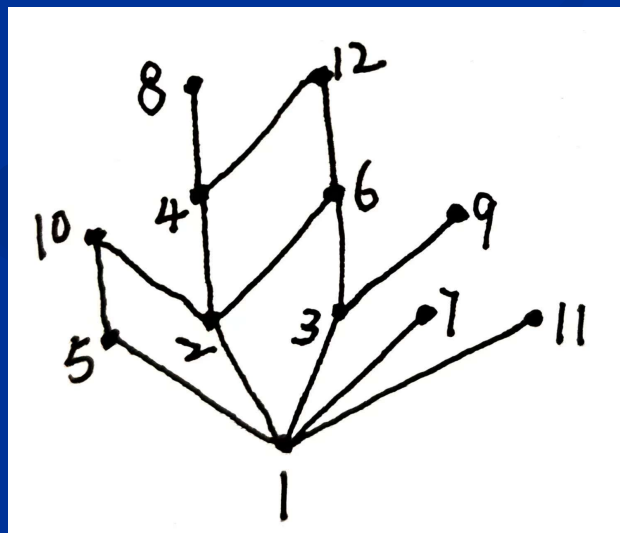
B:

极大元: 3, 4; 极小元: 2, 3

最大元: 无; 最小元: 无

上界: 12; 下界: 1

最小上界: 12; 最大下界: 1



Ch2 习题讲解

2.47 $A=\{1, 2, \dots, 12\}$, $\leq$ 为整除关系, 画出其哈斯图并在偏序集 $\langle A, \leq \rangle$ 中求子集 $B=\{x \mid x \in A, 2 \leq x \leq 4\}$ 的极大元、极小元、最大元、最小元、上界、下界、最小上界和最大下界。

A:

极大元: 7, 8, 9, 10, 11, 12; 极小元: 1

最大元: 无; 最小元: 1

上界: 无; 下界: 1

最小上界: 无; 最大下界: 1

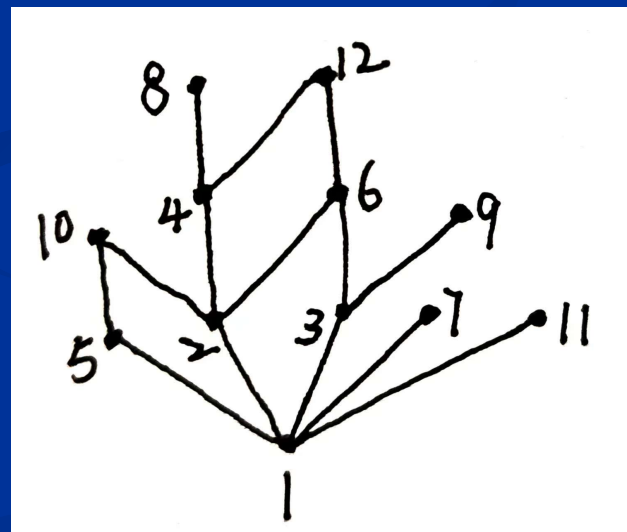


图 论

- 无序积 $A \& B$ 、顶点集 V 、边集 E 、无/有向边、无向图 G 、有向图 D 、图 $G = \langle V, E \rangle$ ； n 阶图、零图、平凡图（1阶零图）、空图、标定图、非标定图、基图、端点、关联、关联次数、环、相邻、始点、终点、孤立点；邻域、闭邻域、后继元集、先驱元集、关联集；平行边、重数、多重图、简单图；子图、母图、真子图、生成子图、导出子图；删除边/边集 $G - e / E'$ 、删除顶点/顶点集 $G - v / V'$ 、收缩边 $G \setminus e$ 、加新边 $G + (u, v)$ ；图的并、交、差、环和、不交、边不交
- 顶点度数 $d(v)$ 、出度 $d^+(v)$ 、入度 $d^-(v)$ 、图的最大度 $\Delta(G)$ 、最小度 $\delta(G)$ 、悬挂顶点、悬挂边、奇度顶点、偶度顶点；度数列、出度列、入度列、可图化的、可简单图化的；图的同构、彼得森图； n 阶完全图 K_n 、 n 阶竞赛图、 k -正则图；补图、自补图；通路、始点和终点、长度、回路、简单通路、简单回路、初级通路/路径、初级回路、圈、奇圈、偶圈、复杂通路、复杂回路；

图 论

- 连通、连通分支、连通分支数 $p(G)$ 、连通图、非连通图、短程线、距离；点割集、割点、边割集、割边/桥、点连通度、 k -连通图、边连通度、 r 边-连通图；有向图：可达、相互可达、短程线、距离；弱连通图、单向连通图、强连通图；无向图：极大路径、扩大路径法；二部图/二分图/偶图、完全二部图 $K_{r,s}$
- 关联矩阵 $M(G)$ ($n \times m$, n 个顶点 m 条边)、邻接矩阵 $A(G)$ ($n \times n$, n 个顶点)、 $B_l = A + A^2 + \dots + A^l (l \geq 1)$ 、可达矩阵 $P(D)$ (B_{n-1}) ;
- 欧拉通路和半欧拉图、欧拉回路和欧拉图；哈密顿通路和半哈密顿图、哈密顿回路和哈密顿图

代数结构

- 算符、封闭、不封闭、二元运算、一元运算、交换律、结合律、幂等律、幂等元、分配律、吸收律、幺元
 $(\forall x \in S, \exists e \in S \text{ 使 } x * e = e * x = e)$ 、零元
 $(\forall x \in S, \exists \theta \in S \text{ 使 } x * \theta = \theta * x = \theta)$ 、逆元
 $(\text{给定 } x \in S, \exists x^{-1} \in S \text{ 使 } x * x^{-1} = x^{-1} * x = e)$ 、消去律
- 代数（系统）、特异元素/代数常数、同类型的代数系统、同种的代数系统、子代数（系统）、真子代数、平凡子代数、同态（映射）；单同态、满同态、同构；
- 半群、幺半群/独异点、群（封闭、可结合、幺元、逆元）、Klein四元群；有限群/n阶群、无限群、平凡群、交换群/阿贝尔Abel群；n次幂、k阶元、无限阶元；

代数结构

- 子群 $H \leq G$ 、真子群 $H < G$ 、平凡子群；由 a 生成的子群 $\langle a \rangle$ 、群 G 的中心 C 、由 B 生成的子群 $\langle B \rangle$ 、子群格；
- 循环群（ n 阶循环群和无限循环群）、生成元、 n 元置换；环、整环、域；
- 格、格中任意元素 x 与 y 的二元运算 $\vee$ （最小上界/上确界）和 $\wedge$ （最大下界/下确界）【 $x \leq y$ 则 $x \vee y = y$, $x \wedge y = x$ ；不可比则向上/下找最近交点】、幂集格、子群格；对偶命题
- 分配格、钻石格、五角格；全下界、全上界、有界格；补元、有补格；布尔格（元素个数必为 2^n ）、布尔代数

群证明基本架构

■ 代数系统 $\langle A, * \rangle$

- $*$ 是封闭的: $\forall a, b \in A$, 都有 $a * b \in A$
- $*$ 是可结合的: $\forall a, b, c \in A$, 都有 $(a * b) * c = a * (b * c)$
- $*$ 是可交换的: $\forall a, b \in A$, 都有 $a * b = b * a$
- 有么元: 给定 A 中某元素 e , 使得 $\forall a \in A$, 都有 $e * a = a * e = a$
- 任意元素有逆元: $\forall a \in A$, $\exists a^{-1} \in A$, 使得 $a^{-1} * a = a * a^{-1} = e$

数理逻辑

- 命题、真值、真命题、假命题、简单/原子命题、复合命题、否定式 $\neg p$ 、合取式 $p \wedge q$ 、析取（相容或）式 $p \vee q$ 、蕴含式 $p \rightarrow q$ 、前件、后件、等价式 $p \leftrightarrow q$ 、联结词的优先顺序
- 命题常项/常元、命题变项/变元、原子命题公式、合式公式/命题公式/公式形式/公式、子公式、0层/ k 层公式、赋值/解释、成真/假赋值、真值表、重言式/永真式、矛盾式/永假式、可满足式、哑元
- 等值式 $A \iff B$ ；16组等值式模式；代入实例、置换规则、等值演算
- 文字、简单析取式、简单合取式、析取范式、合取范式、范式；极小项、极大项、主析取范式、主合取范式（真值表法、等值演算法）

数理逻辑

- 前提、结论、推理——直接证法、附加前提证明法（结论形如 $A \rightarrow B$ 则以 A 为附加前提论证 B 成立）、归谬法（以结论的否定作为附加前提论证存在矛盾式）
- 个体词：个体常项、个体变项、个体域/论域、全总个体域；谓词：谓词常项、谓词变项、 n 元谓词、0元谓词
- 量词：全程量词、存在量词；特性谓词；一阶语言、逻辑符号、非逻辑符号、项、原子公式、谓词公式；辖域、指导变元、约束出现、自由出现、闭式；解释和赋值；代换实例；一阶逻辑中的等值式和推理定律
- 符号化的固定句式：
 - 所有..... ($A(x)$) 都..... ($B(x)$) : $\forall x(A(x) \rightarrow B(x))$
 - 存在..... ($A(x)$) ($B(x)$) : $\exists x(A(x) \wedge B(x))$

主析取范式求解例题

➤A, B, C, D四个人中要派两个人出差, 需要满足如下三个条件, 请问有几种派法? 如何派? (1) 若A去则C和D中要去一人; (2) B和C不能都去; (3) C去则D要留下。

	$P \ Q \ R \ S$				$(P \rightarrow \neg(R \Leftrightarrow S)) \wedge (\neg(Q \wedge R)) \wedge (R \rightarrow \neg S)$
P : A去; Q : B去; R : C去; S : D去	T	T	F	F	F
(1) $P \rightarrow \neg(R \Leftrightarrow S)$	T	F	T	F	T
(2) $\neg(Q \wedge R)$	T	F	F	T	T
(3) $R \rightarrow \neg S$	F	T	T	F	F
	F	T	F	T	T
	F	F	T	T	F
					

真值表为真行赋值为TFTF、TFFT、FTFT, 故有三种派法: AC去AD去或BD去

推证例题

例1: 前提: $P \vee Q$, $P \rightarrow R$, $Q \rightarrow S$; 结论: $S \vee R$

证明: (1) $P \vee Q$

P

(2) $\neg P \rightarrow Q$

T(1)

(3) $Q \rightarrow S$

P

(4) $\neg P \rightarrow S$

T(2)(3)

(5) $\neg S \rightarrow P$

T(4)

(6) $P \rightarrow R$

P

(7) $\neg S \rightarrow R$

T(5)(6)

(8) $S \vee R$

T(7)

务必正确翻译前提和结论

必须将论证过程中的公式
全部编号并依据P规则或T
规则写出其成立理由

