

《 离散数学 》

本试卷共 6 页；考试时间 110 分钟；

专业 _____ 班级 _____ 学号 _____ 姓名 _____

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

■ 一. 填空题(20 分)

- 1、设 P : 我有时间; Q : 我将去市里, 将“只有我有时间, 我才去市里”命题符号化 $Q \rightarrow P$.

答案: $(Q \rightarrow P)$

- 2、公式 $(\forall x)(P(x, y) \rightarrow Q(x, y)) \vee (\exists z)R(y, z) \rightarrow S(x)$ 中自由变元为 _____, 约束变元为 _____.

答案: $(x, y), (x, z)$

- 3、设 $F = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 2, 2 \rangle \}$, $G = \{ \langle 4, 2 \rangle, \langle 2, 5 \rangle, \langle 3, 1 \rangle \}$, 则 $F \circ G =$ _____.

答案: $\{ \langle 4, 2 \rangle, \langle 3, 2 \rangle \}$

- 4、代数系统 $\langle Z, + \rangle$ (其中 Z 是整数集合, $+$ 是普通加法), Z 对 $+$ 的么元为 _____, 零元为 _____, 任 $x \in Z, x^{-1} =$ _____.

答案: 0, 不存在, $-x$

■ 二. 选择题(10 分)

- 1、下面 4 个推理定律中, 不正确的为 ().

■ A. $A \Rightarrow (A \vee B)$ (附加律)■ B. $(A \vee B) \wedge \neg A \Rightarrow B$ (析取三段论)■ C. $(A \rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$ (假言推理)■ D. $(A \rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow A$ (拒取式)

■ 答案: D

- 2、下列四个命题中哪一个为真? ().

A. $\emptyset \in \emptyset$ B. $\emptyset \in \{a\}$ ■ C. $\emptyset \in \{\{\emptyset\}\}$ D. $\emptyset \subseteq \emptyset$

■ 答案: D

- 3、设 $S = \{a, b, c, d\}$, $R = \{ \langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle d, d \rangle \}$, 则 R 的性质是 ().

■ A. 自反、对称、传递的

B. 对称、反对称、传递的

■ C. 自反、对称、反对称的

D. 只有对称性

■ 答案: B

(离散数学) 试卷 第 1 页 共 6 页

■ 4. 下列四组数据中, 不能成为任何 4 阶无向简单图的度数序列的为 ()

■ A. 2, 2, 2, 2 B. 1, 1, 1, 3

■ C. 1, 1, 2, 3 D. 1, 2, 2, 3

■ 答案: C

■ 5. 设 $A = \{a, b, c\}$, 则下列是集合 A 的划分的是 ()。

■ A. $\{(b, c), \{c\}\}$

■ B. $\{(a, b), \{a, c\}\}$

■ C. $\{(a, b), c\}$

■ D. $\{(a), \{b, c\}\}$

■ 答案: D

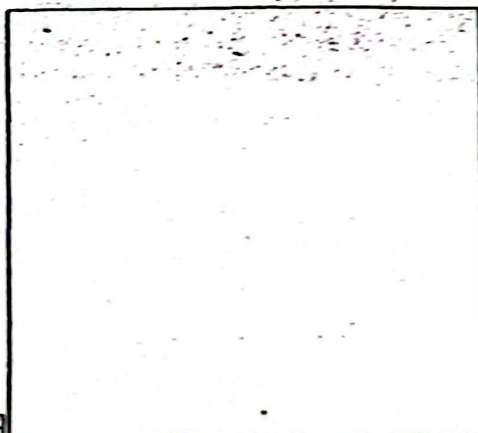
三、解答题 (6 题共 42 分)

1. 设集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$, R 是 A 上的整除关系。

(1) 画出偏序集 (A, R) 的哈斯图:

(2) 写出 A 的子集 $\{2, 4, 6, 8\}$ 的上界, 下界, 最小上界, 最大下界。

(3) 写出集合 A 的最大元, 最小元, 极大元, 极小元。



解: (1) 偏序集 (A, R) 的哈斯图

(2) 子集 $\{2, 4, 6, 8\}$ 无上界, 下界是 1, 2. 无最小上界, 最大下界是 2.

(3) A 无最大元, 最小元是 1. 极大元是 8, 12, 极小元是 1.

2. 求 $(\neg P \rightarrow Q) \wedge (R \vee P)$ 的主析取范式和主合取范式

解: $(\neg P \rightarrow Q) \wedge (R \vee P)$

$= (P \vee Q) \wedge (R \vee P)$ (合取范式)

$= (P \vee Q \vee (R \wedge \neg R)) \wedge (P \vee (Q \wedge \neg Q) \vee R)$

$= (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R)$

$= (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R)$ (主合取范式)

$= \Pi(0, 1, 2)$ (主合取范式)

$= \Sigma(3, 4, 5, 6, 7)$ (主析取范式)

3、设 f 是一元运算, P 是一元谓词, Q 是二元谓词, 给定解释 I :

$D = \{2, 3\}$, $f(2) = 3$, $f(3) = 2$, $P(2) = 1$, $P(3) = 0$

$Q(2, 2) = Q(3, 3) = 1$, $Q(2, 3) = Q(3, 2) = 0$

求在解释 I 下 $\forall x \exists y (Q(f(x), y) \rightarrow P(x))$ 的真值.

解: $\forall x \exists y (Q(f(x), y) \rightarrow P(x))$

$\Leftrightarrow \forall x \exists y (\neg Q(f(x), y) \vee P(x))$

$\Leftrightarrow \forall x (\neg Q(f(x), 2) \vee \neg Q(f(x), 3) \vee P(x))$

$\Leftrightarrow (\neg Q(f(2), 2) \vee \neg Q(f(2), 3) \vee P(2))$

$\wedge (\neg Q(f(3), 2) \vee \neg Q(f(3), 3) \vee P(3))$

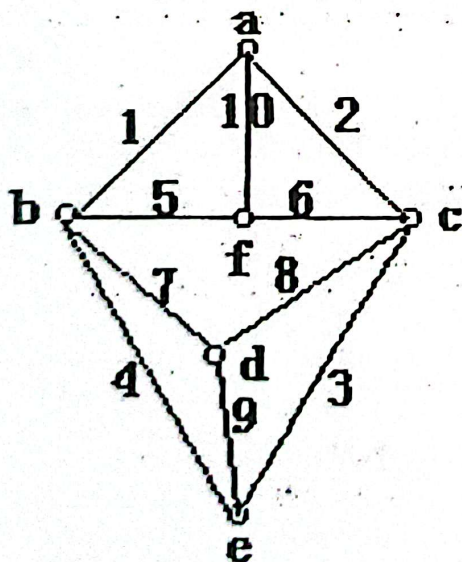
$\Leftrightarrow (\neg Q(3, 2) \vee \neg Q(3, 3) \vee P(2))$

$\wedge (\neg Q(2, 2) \vee \neg Q(2, 3) \vee P(3))$

$\Leftrightarrow (1 \vee 0 \vee 1) \wedge (0 \vee 1 \vee 0)$

$\Leftrightarrow 1 \wedge 1$

4、如图给出的赋权图表示六个城市及架起城市间直接通讯线路的预测造价。试给出设计方案使得各城市间能够通讯且总造价最小, 并计算出最小总造价。



解题: (最小生成树的应用) 其树权即最小造价为: $1+2+3+5+7=18$

5、化简集合式子

$$((A \cup B \cup C) \cap (A \cup B)) - ((A \cup (B - C)) \cap A)$$

解：原式 $= (A \cup B) - A$

$$= (A \cup B) \cap \sim A$$

$$= (A \cap \sim A) \cup (B \cap \sim A)$$

$$= B - A$$

6、(1) 设 $G_1 = \langle \mathbb{R}, + \rangle$ 是实数加群, $G_2 = \langle \mathbb{R}^*, \cdot \rangle$ 是非零实数关于普通乘法构成的群。令 $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*, \varphi(x) = e^x$

请问 φ 是 G_1 到 G_2 的同态映射吗?

(2) 设 G_1, G_2 是群, e_2 是 G_2 的么元。令

$$\varphi: G_1 \rightarrow G_2, \varphi(a) = e_2, \forall a \in G_1$$

φ 是 G_1 到 G_2 的同态映射吗?

解: (1) φ 是 G_1 到 G_2 的同态, 因为 $\forall x, y \in \mathbb{R}$ 有

$$\varphi(x+y) = e^{x+y} = e^x \cdot e^y = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$$

因为 $\varphi: G_1 \rightarrow G_2$ 是单射的, 则称 φ 为单同态

(2) 因为 $\forall a, b \in G_1$ 有

$$\varphi(ab) = e_2 = e_2 e_2 = \varphi(a) \varphi(b)$$

因为 $\varphi: G_1 \rightarrow G_2$ 不单射不满射, φ 不是单同态也不是满同态。

四、证明题 (14 分)

1、证明: $P \rightarrow (Q \rightarrow R) \wedge (\neg S \vee P) \wedge Q \Rightarrow S \rightarrow R$

证明: (1) S 附加前提引入
 (2) $\neg S \vee P$ 前提引入
 (3) $S \rightarrow P$ (2) 置换
 (4) P (1)(3) 假言推理
 (5) $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$ 前提引入
 (6) $Q \rightarrow R$ (4)(5) 假言推理
 (7) Q 前提引入
 (8) R (4)(5) 假言推理
 (9) $S \rightarrow R$ CP 规则

■ 2、 I 上的二元运算 $*$ 定义为: $a, b \in I, a * b = a + b - 2$ 。试证: $\langle I, * \rangle$ 为群。

■ 证明:

■ (1) 对任意的 $a, b \in I, a * b = a + b - 2 \in I$, 所以 I 对于二元运算 $*$ 是封闭的。

■ (2) $a, b, c \in I, (a * b) * c = (a + b - 2) + c - 2 = a + b + c - 4$,
 $a * (b * c) = a + (b + c - 2) - 2 = a + b + c - 4$ 。故 $(a * b) * c = a * (b * c)$, 从而 $*$ 满足结合律。

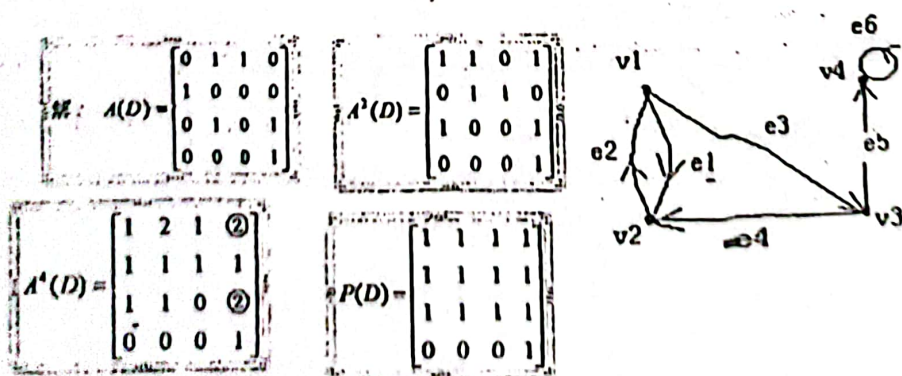
■ (3) 记 $e = 2$ 。对 $a \in I, a * 2 = a + 2 - 2 = a = 2 + a - 2 = 2 * a$ 。故 $e = 2$ 是 I 关于运算 $*$ 的幺元。

■ (4) 对 $a \in I$, 因为 $a * (4 - a) = a + 4 - a - 2 = 2 = e = 4 - a + a - 2 = (4 - a) * a$ 。故 $4 - a$ 是 a 关于运算 $*$ 的逆元。

■ 综上所述, $\langle I, * \rangle$ 为群。

五、应用题 (14 分)

■ 例如: 在有向图 D (如下图) 中, 求从结点 v_1 到 v_4 长度为 4 的所有通路条数 (要求写出), 从 v_3 到 v_4 长度为 4 的通路有几条? 该有向图是哪种连通图?



由 $P(D)$ 可知, 该有向图是单向连通图。

5

《离散数学》

本试卷共 4 页； 考试时间 110 分钟；

专业 _____ 班级 _____ 学号 _____ 姓名 _____

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

得分

一、选择题 (30 分, 每题 3 分)

1. 下列命题是真命题的是 (D).

A. 我正在说谎

B. 严禁吸烟

C. 如果 $1+2=3$, 那么雪是黑的

D. 如果 $1+2=5$, 那么雪是黑的

2. 命题公式 $(P \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow Q$ 是 (C).

A. 矛盾式

B. 蕴含式

C. 重言式

D. 等价式

3. $R = \{ \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 4, 3 \rangle \}$, 则下列不是 (R) 中元素的是 (A).

A. $\langle 1, 1 \rangle$

B. $\langle 1, 2 \rangle$

C. $\langle 1, 3 \rangle$

D. $\langle 1, 4 \rangle$

4. 设 $A = \{ \{1, 2, 3\}, \{4, 5\}, \{6, 7, 8\} \}$, 下列选项正确的是 (B).

A. $1 \in A$

B. $\{1, 2, 3\} \subseteq A$

C. $\{ \{4, 5\} \} \subseteq A$

D. $\emptyset \in A$

5. 在公式 $\forall x F(x, y) \rightarrow \exists y G(x, y)$ 中变元 x 是 (C).

A. 自由变元

B. 约束变元

C. 既是自由变元, 又是约束变元

D. 既不是自由变元, 又不是约束变元

6. 下列联结词中不满足结合律的是 (C).

A. $\wedge$

B. $\vee$

C. $\rightarrow$

D. $\leftrightarrow$

7. 下列命题公式为重言式的是 ()

A. $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$

- ☒ A. $P \vee T$ B. $P \wedge T$ C. $P \vee F$ D. $P \wedge F$

8. 对于集合 A, B, C , 下列命题中为真的是 (A).
 $A = \{1, 2\}, B = \{1, 2, 3\}, C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

- ☒ A. 若 $A \subseteq B$ 及 $B \subseteq C$, 则 $A \subseteq C$ B. 若 $A \subseteq B$ 及 $B \subseteq C$, 则 $A \subseteq C$
☒ C. 若 $A \subseteq B$ 及 $B \subseteq C$, 则 $A \subseteq C$ D. 若 $A \subseteq B$ 及 $B \subseteq C$, 则 $A \subseteq C$

9. 对于集合 A, B, C, D , 下列公式中成立的是 (D).

- ☒ A. $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$
☒ B. $(A - B) \times (C - D) = (A \times C) - (B \times D)$
☒ C. $(A \oplus B) \times (C \oplus D) = (A \times C) \oplus (B \times D)$
☒ D. $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$

10. 已知 $A = \{1, 2, 3\}$, 则 A 的划分有 (C) 个.

- A. 2 B. 3 C. 5 D. 6

得分

二、填空题 (20分, 每空2分)

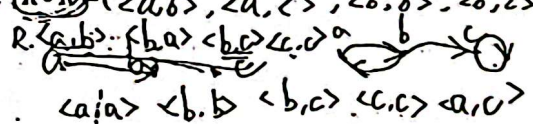
1. $\forall x P(x) \rightarrow Q(x)$ 中, 指导变元 x 的作用域是 ($P(x)$).

2. 满足 (自反性), (对称性), (传递性) 性质的关系是 等价关系.

3. $A = \{1, 3, 5\}, B = \{2, 3, 6\}$, 则 $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6\}$, $A - B = \{1, 5\}$.

4. $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)$ 的主合取范式为 (M_0, M_1, M_2, M_3).

5. 设二元关系 $R = \{ \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, c \rangle \}$, 则 $\text{dom}(R) = \{a, b, c\}$, $\text{ran}(R) = \{b, a, c\}$.



三、判断题 (10分, 对的填“T”, 错的填“F”)

1. 集合 A 上的等价关系与其划分是一一对应的. (T)

2. 集合 $A = \{1, 2, 3\}$ 上的关系 $R = \{ \langle 2, 3 \rangle \}$ 满足传递性. (T)

3. 陈述句一定是命题. (F)

4. 对于任意集合 A , $\emptyset \in A$. (X)

5. 一个命题的逆命题与否命题等价. (X)

$\begin{aligned} & \text{原命题: } P \rightarrow Q \\ & \text{逆命题: } Q \rightarrow P \\ & \text{否命题: } \neg P \rightarrow \neg Q \\ & \text{逆否命题: } \neg Q \rightarrow \neg P \end{aligned}$

得分

四、应用题 (40 分, 每题 8 分)

1. 求下式的主合范式.

P	Q	$\neg P \vee \neg Q$	$P \leftrightarrow Q$	$(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow (P \leftrightarrow Q)$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	1	1

~~$P \vee Q$~~

$$\begin{aligned}
 & (\neg P \vee \neg Q) \rightarrow (P \leftrightarrow Q) \\
 & \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q) \vee (P \leftrightarrow Q) \\
 & \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q) \vee ((\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)) \\
 & \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q) \vee (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \\
 & \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \\
 & \Leftrightarrow \sum_{0,1,10,11} \Leftrightarrow \Pi_{00} \Leftrightarrow P \vee Q
 \end{aligned}$$

2. 将 $(\exists x)(P(x) \rightarrow (\forall y)Q(x,y)) \wedge \neg(\exists z)R(z)$ 化为前束范式

$$\begin{aligned}
 & (\exists x)(P(x) \rightarrow (\forall y)Q(x,y)) \wedge \neg(\exists z)R(z) \\
 & \Leftrightarrow \exists x \forall y \forall z ((P(x) \rightarrow Q(x,y)) \wedge \neg R(z))
 \end{aligned}$$

3. 试翻译: 发光的不都是金子.

其中: $L(x)$: x 发光; $G(x)$: x 是金子.

$$\neg(\forall x)(L(x) \rightarrow G(x))$$

4. 证明: 集合 A 和 B, 若 $A - B = B - A$, 则 $A = B$.

$$\textcircled{1} A - B = A \cap \sim B$$

$$B - A = B \cap \sim A$$

$$\text{又: } (A - B) \cap (B - A) = A \cap \sim B \cap B \cap \sim A = \emptyset$$

$$\therefore A - B = B - A = \emptyset$$

$$\text{即 } A \subseteq B, B \subseteq A$$

$$\therefore A = B$$

$$\textcircled{2} \forall x \in A, \text{ 则 } x \notin B - A, x \notin A - B$$

$$\text{即 } A \subseteq B$$

$$\forall x \in B, \text{ 则 } x \notin A - B, x \notin B - A$$

$$\text{即 } B \subseteq A$$

$$\text{即 } A = B$$

$$\textcircled{3} A \cup (A - B) = A \cup (B - A)$$

$$\text{即 } A = A \cup B, \text{ 即 } B \subseteq A$$

同理:

5. 证明: 整数集合上的 $\leq$ 关系是偏序关系.

证明: ① 对于任意整数 $a \in \mathbb{I}$, 有 $a \leq a$ 成立, 故 $\leq$ 是自反的.

② 对于任意整数 $a, b \in \mathbb{I}$, 若 $a \leq b$ 且 $b \leq a$, 则必有 $a = b$, 故 $\leq$ 是反对称的.

③ 若 $a \leq b, b \leq c$, 有 $a \leq c$, 故 $\leq$ 是传递的.

即整数集合上的 $\leq$ 关系是偏序关系.

《离散数学》

本试卷共 6 页, 考试时间 110 分钟

专业 _____ 班级 _____ 学号 _____ 姓名 _____

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

一、单项选择题(本大题共 15 小题, 每小题 3 分, 共 45 分)

1. 下列语句中不是命题的只有 (A)

A. 这个语句是假的.

B. $1+1=1.0$ ✓

C. 飞碟来自地球外的星球. ✓

D. 凡石头都可炼成金. ✓

2. 若 P: 他聪明; Q: 他用功; 则“他虽聪明, 但不用功”, 可符号化为 (B)

A. $P \vee Q$

B. $P \wedge \neg Q$

C. $P \rightarrow \neg Q$

D. $P \vee \neg Q$

3. 下列命题公式为重言式的是 (A)

A. $p \rightarrow (p \vee q)$ ✓

B. $(p \vee \neg p) \rightarrow q$

C. $q \wedge \neg q$ ✓

D. $p \rightarrow \neg q$

4. 设 $A = \{\emptyset\}$, $B = P(P(A))$, 以下不正确的式子是 (D)

A. $\{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ 包含于 B

B. $\{\{\{\emptyset\}\}\}$ 包含于 B

C. $\{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ 包括于 B

D. $\{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$ 包含于 B

5. 设 $A = \{1, 2, 3\}$, A 上二元关系 $S = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$, 则 S

是 (D)

A. 自反关系

B. 反自反关系

C. 对称关系

D. 传递关系

6. 设 A 是正整数集, $R = \{(x, y) | x, y \in A \wedge x+3y=12\}$, 则 $R \cap ((2, 3, 4, 6) \times \{2, 3, 4, 6\}) =$ (C)

A. $\emptyset$

B. $\{<3, 3>\}$

C. $\{<3, 3>, <6, 2>\}$

D. $\{<3, 3>, <6, 2>, <9, 1>\}$

7. 下列式子不正确的是 (D)

A. $(A-B)-C=(A-C)-B \checkmark$

B. $(A-B)-C=A-(B \cup C) \checkmark$

C. $(A-B)-C=(A-C)-(B-C) \checkmark$

D. $A-(B \cup C)=(A-B) \cup C$

8. 设 $A=\{a, b, c\}$, A 上二元关系 $R=\{<a, a>, <b, b>, <c, c>\}$, 则关系 R 的对称闭包

$S(R)$ 是 (C)

A. $R \cup I_A$

B. R

C. $R \cup \{<a, a>\}$

D. $R \cap I_A$

9. 设 $X=\{a, b, c\}$, I_X 是 X 上恒等关系, 要使 $I_X \cup \{<a, b>, <b, c>, <c, a>, <b, a>\} \cup R$ 为

X 上的等价关系, R 应取 (D)

A. $\{<c, a>, <a, c>\}$

B. $\{<c, b>, <b, a>\}$

C. $\{<c, a>, <b, a>\}$

D. $\{<a, c>, <c, b>\}$

10. 设 B 是不含变元 x 的公式, 谓词公式 $(\forall x)(A(x) \rightarrow B)$ 等价于 (A)

A. $(\exists x)A(x) \rightarrow B$

B. $(\forall x)A(x) \rightarrow B$

C. $A(x) \rightarrow B$

D. $(\forall x)A(x) \rightarrow (\forall x)B$

11. 设论域 $D=\{a, b\}$, 与公式 $\exists x A(x)$ 等价的命题公式是 (C)

A. $A(a) \wedge A(b)$

B. $A(a) \rightarrow A(b)$

C. $A(a) \vee A(b)$

D. $A(b) \rightarrow A(a)$

12. 关于谓词公式 $(\forall x)(\forall y)(P(x, y) \wedge Q(y, z)) \wedge (\exists x)P(x, y)$, 下面的描述中错误的是

(B)

A. $(\forall x)$ 的辖域是 $(\forall y)(P(x, y) \wedge Q(y, z))$

B. z 是该谓词公式的约束变元

C. $(\exists x)$ 的辖域是 $P(x, y)$

D. x 是该谓词公式的约束变元

13. 集合 $A=\{1, 2, 3\}$ 上的下列关系矩阵中符合等价关系条件的是 (B)

A. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

14. 设 Z 是整数集, $B = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$, $f: Z \rightarrow B, f(x) = 2x$, 则 f (C)

A. 仅是满射

B. 仅是入射

C. 是双射

D. 无逆函数

15. 设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, A 上二元关系 $R = \{(1, 2), (3, 4), (2, 2)\}$, $S = \{(2, 4), (3, 1), (4, 2)\}$, 则 $S^{-1} \circ R^{-1}$ 的运算结果是 (A)

A. $\{(4, 1), (2, 3), (4, 2)\}$

B. $\{(2, 4), (2, 3), (4, 2)\}$

C. $\{(4, 1), (2, 3), (2, 4)\}$

D. $\{(2, 2), (3, 1), (4, 4)\}$

得分

二、填空题(每空 1 分, 共 15 分)

1. 设函数 $f: X \rightarrow Y$, 如果对 X 中的任意两个不同的 x_1 和 x_2 , 它们的象 y_1 和 y_2 也不同, 我们说 f 是 入射 函数, 如果 $\text{ran} f = Y$, 则称 f 是 满射 函数.

2. 设 R 为非空集合 A 上的等价关系, 其等价类记为 $(x)_R$. $\forall x, y \in A$, 若 $(x, y) \in R$, 则 $(x)_R$ 与 $(y)_R$ 的关系是 $[x]_R = [y]_R$; 而若 $(x, y) \notin R$, 则 $(x)_R \cap (y)_R = \underline{\emptyset}$.

3. 设 $M(x): x$ 是人, $D(x): x$ 是要死的, 则命题“所有的人都是要死的”可符号化为 $(\forall x)(M(x) \rightarrow D(x))$.

4. 判断一个语句是否为命题, 首先要看它是否为 陈述句, 然后再看它是否具有唯一的 真值.

5. 称集合 S 是给定非空集合 A 的覆盖, 若 $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$, 其中 $S_i \subseteq A, S_i \neq \emptyset$,

$i = 1, 2, \dots, n$, 且 $\bigcup_{i=1}^n S_i = A$; 进一步若

$S_i \cap S_j = \emptyset (i \neq j)$, 则 S 是集合 A 的划分.

6. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 上二元关系 $R = \{(2, 4), (3, 3), (4, 2)\}$, R 的矩阵 M_R 中

$$r_{12} = 1, m_{12} = 0$$

给定谓词公式 A ，其中一部分公式形式为 $(\forall x)B(x)$ 或 $(\exists x)B(x)$ ，则量词 $\forall, \exists$ 后面所跟的 x 称为 指导变元，而称 B 为相应量词的辖域。

8. 设 X, U, V, Y 都是实数集， $f_1: X \rightarrow U$ ，且 $f_1(x) = e^x$ ； $f_2: U \rightarrow V$ ，且 $f_2(u) = u(1+u)$ ； $f_3: V \rightarrow Y$ ，且 $f_3(v) = \cos v$ ，那么 $f_3 \circ f_2 \circ f_1$ 的定义域是 X ，而复合函数 $(f_3 \circ f_2 \circ f_1)(x) = \cos(e^x(1+e^x))$ 。

Handwritten work:

$$f_3 \circ f_2 \circ f_1(x) = f_3(f_2(f_1(x)))$$

$$= \cos(f_2(e^x))$$

$$= \cos(e^x(1+e^x))$$

Diagram:

$$f_3 \circ f_2 \circ f_1 = f_3 \circ (f_2 \circ f_1)$$

$$= f_3 \circ (e^x(1+e^x))$$

$$= \cos(e^x(1+e^x))$$

Handwritten work:

$$f_1(x) = e^x, f_2(u) = u(1+u), f_3(v) = \cos v$$

$$f_3(f_2(f_1(x))) = \cos[e^x(1+e^x)]$$

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

得分

三、计算题 (共 30 分)

1. (5 分) 构造命题公式 $(p \rightarrow (q \wedge r)) \rightarrow \neg p$ 的真值表.

解:

p	q	r	$q \wedge r$	$p \rightarrow (q \wedge r)$	$\neg p$	公式 (1分)
0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	0	0

注: 此时

2. (5 分) 若集合 $A = \{a, \{b, c\}\}$ 的幂集为 $P(A)$, 集合 $B = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ 的幂集为 $P(B)$, 求 $P(A) \cap P(B)$.

全集子集构成的集合
包括空集自身

解: 因为 $P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \{a, \{b, c\}\}\}$ (2分)

$P(B) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ (2分)

所以 $P(A) \cap P(B) = \{\emptyset\}$ (1分)

求

3. (6 分) 求下列公式的主析取范式和主合取范式: $(\neg P \wedge R) \vee (P \wedge Q)$

解: 原式 $\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) = \Sigma(1, 3, 6, 7)$ (3分)

$\Rightarrow (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) = \pi(0, 2, 4, 5)$ (3分)

4、(4分) 设集合 $A=\{a,b,c,d\}$, A 上的关系 $R=\{\langle a,b\rangle, \langle b,a\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,d\rangle\}$, 求 R 的传递闭包 $t(R)$

$$t(R)=\{\langle a,b\rangle, \langle b,a\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,d\rangle, \langle a,a\rangle, \langle b,b\rangle, \langle a,c\rangle, \langle b,d\rangle, \langle a,d\rangle\}$$

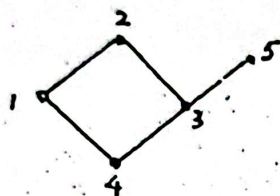
5、(10分) 设 $A=\{1,2,3,4,5\}$, A 上偏序关系

$$R=\{\langle 1,2\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 4,1\rangle, \langle 4,2\rangle, \langle 4,3\rangle, \langle 3,5\rangle, \langle 4,5\rangle\} \cup I_A$$

(1) 作出偏序关系 R 的哈斯图

(2) 令 $B=\{1,2,3,5\}$, 求 B 的最大元, 最小元, 极大元, 极小元, 上界, 上确界, 下界, 下确界.

答案: (1) 偏序关系 R 的哈斯图



(2) B 的最大元: 无, 最小元: 无;

极大元: 2, 5; 极小元: 1, 3

下界: 4, 下确界: 4;

上界: 无, 上确界: 无

得分

四、证明题 (共 10 分)

1、(6分) 不构造真值表求证 $P \rightarrow (P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$

方法一: 证明条件式永真

$$\begin{aligned} & (P \rightarrow (P \rightarrow Q)) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P) \\ & \Leftrightarrow (\neg P \vee (\neg P \vee Q)) \rightarrow (Q \vee \neg P) \\ & \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \rightarrow (\neg P \vee Q) \\ & \Leftrightarrow T \end{aligned}$$

方法二: 后件为 F 推出前件为 F : 1) 后件 F 则 $\neg Q$ 为 T , $\neg P$ 为 F , 即 P 真 Q 假; 2) $P \rightarrow Q$ 假;

3) 前件F

方法三：前件为T时推出后件为T，前件为真有两种情况：(1) P真则 $P \rightarrow Q$ 真，则Q真，则后件为 $F \rightarrow F$ 为真；(2) P假(可选：则 $P \rightarrow Q$ 可假可真，即Q可假可真，)则后件为 $\neg Q \rightarrow T$ 为真

2. (4分) 在实数集 R 上，证明小于等于关系 " $\leq$ " 是偏序关系

证：(1) $\forall a \in R$ ，有 $a \leq a$ 成立，故 $\leq$ 自反

(2) $\forall a, b \in R$ ，若 $a \leq b$ 且 $b \leq a$ 成立，则必有 $a = b$ ，故 $\leq$ 反对称

(3) 若 $a \leq b$ 且 $b \leq c$ 成立，则必有 $a \leq c$ ，故 $\leq$ 传递

所以，" $\leq$ " 是偏序关系

《 离散数学 》

本试卷共 6 页， 考试时间 110 分钟：

专业 _____ 班级 _____ 学号 _____ 姓名 _____

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

得分

一、单项选择题(本大题共 15 小题，每小题 3 分，共 45 分)

1、下列语句中不是命题的只有 (A)

A. 这个语句是假的。

B. $1+1=1.0$

C. 飞碟来自地球外的星球。

D. 凡石头都可练成金。

2、若 P: 他聪明; Q: 他用功; 则“他虽聪明，但不用功”，可符号化为 (B)

A. $P \vee Q$

B. $P \wedge \neg Q$

C. $P \rightarrow \neg Q$

D. $P \vee \neg Q$

3、下列命题公式为重言式的是 (A)

A. $p \rightarrow (p \vee q)$

B. $(p \vee \neg p) \rightarrow q$

C. $q \wedge \neg q$

D. $p \rightarrow \neg q$

4、设 $A=\{\emptyset\}$, $B=P(P(A))$, 以下不正确的式子是 (D)

A. $\{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ 包含于 B

B. $\{\{\{\emptyset\}\}\}$ 包含于 B

C. $\{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ 包括于 B

D. $\{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$ 包含于 B

5、设 $A=\{1, 2, 3\}$, A 上二元关系 $S=\{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$, 则 S 是 (D)

A. 自反关系

B. 反自反关系

C. 对称关系

D. 传递关系

6、设 A 是正整数集, $R=\{(x, y) | x, y \in A \wedge x+3y=12\}$, 则 $R \cap (\{2, 3, 4, 6\} \times \{2, 3, 4, 6\}) = (C)$

《离散数学》试卷 第 1 页 共 7 页

A. $\emptyset$

B. $\{ \langle 3, 3 \rangle \}$

C. $\{ \langle 3, 3 \rangle, \langle 6, 2 \rangle \}$

D. $\{ \langle 3, 3 \rangle, \langle 6, 2 \rangle, \langle 9, 1 \rangle \}$

7. 下列式子不正确的是 (D)

A. $(A-B)-C=(A-C)-B$

B. $(A-B)-C=A-(B \cup C)$

C. $(A-B)-C=(A-C)-(B-C)$

D. $A-(B \cup C)=(A-B) \cup C$

8. 设 $A=\{a,b,c\}$, A 上二元关系 $R=\{ \langle a,a \rangle, \langle b,b \rangle, \langle a,c \rangle \}$, 则关系 R 的对称闭包

$S(R)$ 是 (C)

A. $R \cup I_A$

B. R

C. $R \cup \{ \langle c,a \rangle \}$

D. $R \cap I_A$

9. 设 $X=\{a,b,c\}$, I_X 是 X 上恒等关系, 要使 $I_X \cup \{ \langle a,b \rangle, \langle b,c \rangle, \langle c,a \rangle, \langle b,a \rangle \} \cup R$ 为

X 上的等价关系, R 应取 (D)

A. $\{ \langle c,a \rangle, \langle a,c \rangle \}$

B. $\{ \langle c,b \rangle, \langle b,a \rangle \}$

C. $\{ \langle c,a \rangle, \langle b,a \rangle \}$

D. $\{ \langle a,c \rangle, \langle c,b \rangle \}$

10. 设 B 是不含变元 x 的公式, 谓词公式 $(\forall x)(A(x) \rightarrow B)$ 等价于 (A)

A. $(\exists x)A(x) \rightarrow B$

B. $(\forall x)A(x) \rightarrow B$

C. $A(x) \rightarrow B$

D. $(\forall x)A(x) \rightarrow (\forall x)B$

11. 设论域 $D=\{a,b\}$, 与公式 $\exists x A(x)$ 等价的命题公式是 (C)

A. $A(a) \wedge A(b)$

B. $A(a) \rightarrow A(b)$

C. $A(a) \vee A(b)$

D. $A(b) \rightarrow A(a)$

12. 关于谓词公式 $(\forall x)(\forall y)(P(x,y) \wedge Q(y,z)) \wedge (\exists x)P(x,y)$, 下面的描述中错误的是

(B)

A. $(\forall x)$ 的辖域是 $(\forall y)(P(x,y) \wedge Q(y,z))$

B. z 是该谓词公式的约束变元

C. $(\exists x)$ 的辖域是 $P(x,y)$

D. x 是该谓词公式的约束变元

13. 集合 $A=\{1, 2, 3\}$ 上的下列关系矩阵中符合等价关系条件的是 (B)

A.
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

B.
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

C. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

14. 设 Z 是整数集, $E = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$, $f: Z \rightarrow E$, $f(x) = 2x$, 则 f (C)

A. 仅是满射

B. 仅是入射

C. 是双射

D. 无逆函数

15. 设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, A 上二元关系 $R = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 2, 2 \rangle\}$, $S = \{\langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 4, 2 \rangle\}$, 则 $S^{-1} \circ R^{-1}$ 的运算结果是 (A)

A. $\{\langle 4, 1 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 4, 2 \rangle\}$

B. $\{\langle 2, 4 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 4, 2 \rangle\}$

C. $\{\langle 4, 1 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle\}$

D. $\{\langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 4, 4 \rangle\}$

得分

二、填空题(每空 1 分, 共 15 分)

1. 设函数 $f: X \rightarrow Y$, 如果对 X 中的任意两个不同的 x_1 和 x_2 , 它们的象 y_1 和 y_2 也不同, 我们说 f 是 入射 函数, 如果 $\text{ran} f = Y$, 则称 f 是 满射 函数。

2. 设 R 为非空集合 A 上的等价关系, 其等价类记为 $(x)_R$. $\forall x, y \in A$, 若 $\langle x, y \rangle \in R$, 则 $(x)_R$ 与 $(y)_R$ 的关系是 $[x]_R = [y]_R$, 而若 $\langle x, y \rangle \notin R$, 则 $(x)_R \cap (y)_R = \underline{\emptyset}$.

3. 设 $M(x): x$ 是人, $D(x): x$ 是要死的, 则命题“所有的人都是要死的”可符号化为 $(\forall x)(M(x) \rightarrow D(x))$.

4. 判断一个语句是否为命题, 首先要看它是否为 陈述句, 然后再看它是否具有唯一的 真值.

5. 称集合 S 是给定非空集合 A 的覆盖: 若 $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$, 其中 $S_i \subseteq A$, $S_i \neq \emptyset$,

$i = 1, 2, \dots, n$, 且 $\bigcup_{i=1}^n S_i = A$; 进一步若

$S_i \cap S_j = \emptyset (i \neq j)$, 则 S 是集合 A 的划分。

6. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 上二元关系 $R = \{\langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 4, 2 \rangle\}$, R 的关系矩阵 M_R 中

$$m_{24} = \underline{1}, m_{34} = \underline{0}.$$

7、给定谓词合式公式 A ，其中一部分公式形式为 $(\forall x)B(x)$ 或 $(\exists x)B(x)$ ，则量词 $\forall, \exists$ 后面所跟的 x 称为 指导变元，而称 B 为相应量词的 作用域。

8、设 X, U, V, Y 都是实数集， $f_1: X \rightarrow U$ ，且 $f_1(x) = e^x$ ； $f_2: U \rightarrow V$ ，且 $f_2(u) = u(1+u)$ ； $f_3: V \rightarrow Y$ ，且 $f_3(v) = \cos v$ 。那么 $f_3 \circ f_2 \circ f_1$ 的定义域是 X ，而复合函数 $(f_3 \circ f_2 \circ f_1)(x) = \underline{\cos(e^x(1+e^x))}$ 。

自觉遵守考场纪律

得分

三、计算题（共 30 分）

1. (5 分) 构造命题公式 $(p \rightarrow (q \wedge r)) \rightarrow \neg p$ 的真值表。

解：

p	q	r	$q \wedge r$	$p \rightarrow (q \wedge r)$	$\neg p$	公式 (1分)
0	0	0	0	1	1	1 (1分)
0	0	1	0	1	1	1 (1分)
0	1	0	0	1	1	1 (1分)
0	1	1	1	1	1	1 (1分)
1	0	0	0	0	0	0 (1分)
1	0	1	0	0	0	0 (1分)
1	1	0	0	0	0	0 (1分)
1	1	1	1	1	0	0 (1分)

2. (5 分) 若集合 $A = \{a, \{b, c\}\}$ 的幂集为 $P(A)$ ，集合 $B = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ 的幂集为 $P(B)$ ，求 $P(A) \cap P(B)$ 。

解：因为 $P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \{a, \{b, c\}\}\}$ (2分)

$P(B) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ (2分)

所以 $P(A) \cap P(B) = \{\emptyset\}$ (1分)

3. (6 分) 求下列公式的主析取范式和主合取范式： $(\neg P \wedge R) \vee (P \wedge Q)$

解：原式 $\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) = \sum (1, 3, 6, 7)$ (3分)

$\Leftrightarrow (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) = \pi (0, 2, 4, 5)$ (3分)

4、(4分) 设集合 $A=\{a,b,c,d\}$, A 上的关系 $R=\{\langle a,b\rangle, \langle b,a\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,d\rangle\}$, 求 R 的传递闭包 $t(R)$

$$t(R)=\{\langle a,b\rangle, \langle b,a\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,d\rangle, \langle a,a\rangle, \langle b,b\rangle, \langle a,c\rangle, \langle b,d\rangle, \langle a,d\rangle\}$$

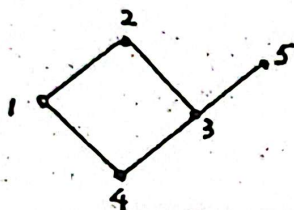
5、(10分) 设 $A=\{1,2,3,4,5\}$, A 上偏序关系

$$R=\{\langle 1,2\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 4,1\rangle, \langle 4,2\rangle, \langle 4,3\rangle, \langle 3,5\rangle, \langle 4,5\rangle\} \cup I_A;$$

(1) 作出偏序关系 R 的哈斯图

(2) 令 $B=\{1,2,3,5\}$, 求 B 的最大, 最小元, 极大, 极小元, 上界, 上确界, 下界, 下确界。

答案: (1) 偏序关系 R 的哈斯图为



(2) B 的最大元: 无, 最小元: 无;

极大元: 2, 5; 极小元: 1, 3

下界: 4, 下确界 4;

上界: 无, 上确界: 无

得分

四、证明题 (共 10 分)

1、(6分) 不构造真值表求证 $P \rightarrow (P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$

方法一: 证明条件式永真

$$\begin{aligned} & (P \rightarrow (P \rightarrow Q)) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P) \\ & \Leftrightarrow (\neg P \vee (\neg P \vee Q)) \rightarrow (Q \vee \neg P) \\ & \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \rightarrow (\neg P \vee Q) \\ & \Leftrightarrow T \end{aligned}$$

方法二: 后件为 F 推出前件为 F : 1) 后件 F 则 $\neg Q$ 为 T $\neg P$ 为 F , 即 P 真 Q 假; 2) $P \rightarrow Q$ 假;

3) 前件F

方法三：前件为T时推出后件为T；前件为真有两种情况：(1) P真则 $P \rightarrow Q$ 真，则Q真，则后件为 $F \rightarrow F$ 为真；(2) P假(可选：则 $P \rightarrow Q$ 可假可真，即Q可假可真，)则后件为 $\neg Q \rightarrow T$ 为真

2、(4分) 在实数集R上，证明小于等于关系“ $\leq$ ”是偏序关系

证：(1) $\forall a \in R$ ，有 $a \leq a$ 成立，故 $\leq$ 自反

(2) $\forall a, b \in R$ ，若 $a \leq b$ 且 $b \leq a$ 成立，则必有 $a = b$ ，故 $\leq$ 反对称

(3) 若 $a \leq b$ 且 $b \leq c$ 成立，则必有 $a \leq c$ ，故 $\leq$ 传递

所以，“ $\leq$ ”是偏序关系

《离散数学》

本试卷共 6 页； 考试时间 110 分钟；

专业 _____ 班级 _____ 学号 _____ 姓名 _____

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

得分

一、选择题 (10 分, 每题 2 分)

1、设命题是“选小王或者小李中的一人当班长”， p ：选小王当班长， q ：选小李当班长，下列符号化正确的是 ()

- A. $p \wedge q$ B. $p \vee q$
C. $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ D. $(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$

2、设 $S = Q \times Q$ ，其中 Q 是有理数集合，定义 S 上的二元运算 $*$ ，

$\forall \langle a, b \rangle, \langle x, y \rangle \in S$ ，有 $\langle a, b \rangle * \langle x, y \rangle = \langle ax, ay + b \rangle$ ， $\langle S, * \rangle$ 的幺元是

()

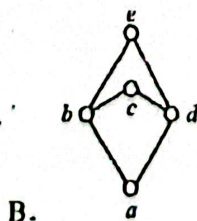
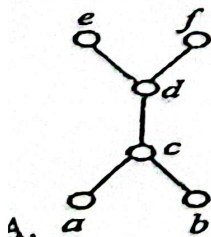
- A. $\langle 1, 0 \rangle$ B. $\langle 0, 1 \rangle$ C. $\langle 1, 1 \rangle$ D. $\langle 0, 0 \rangle$

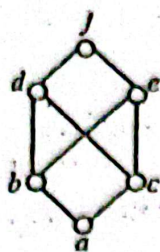
3、设 $S = \{x \mid x = 2n \wedge n \in \mathbb{Z}\}$ ， $+$ ， $\cdot$ 是普通加法和乘法，则代数系统 $\langle S, +, \cdot \rangle$ 的性质

()

- A. 是环 B. 不是环 C. 是整环 D. 是域

4、偏序集的哈斯图分别由下图给出，其中 () 是格。





C.

D.

5. $\neg \exists x F(x) \rightarrow \forall y G(x, y)$ 中 $\exists x$ 的作用域是()

A. $G(x, y)$

B. $F(x)$

C. $F(x) \rightarrow \forall y G(x, y)$

D. $\forall y G(x, y)$

得分

二、填空题 (10 分, 每空 2 分)

1. 在一阶逻辑中将命题“没有不吃饭的人”符号化, (其中谓词 $M(x)$ 表示 x 是人,

$F(x)$ 表示 x 吃饭,) _____.

2. 设 $|A|=3, |P(B)|=64, |P(A \cup B)|=256$, $|A \cap B| =$ _____.

3. A, B 为实数集, $f(x) = \sqrt{x}$, 则 f _____ 从 A 到 B 函数.

4. 设 $\langle R^*, \circ \rangle$ 是代数系统, 其中 R^* 为非零实数集合. $\forall a, b \in R^*, a \circ b = \frac{1}{2}(a+b)$.

则运算 $\circ$ _____ 满足交换律, 逆元 _____ 存在.

得分

三、计算题 (60 分)

1. 求 $((p \vee q) \rightarrow r) \rightarrow p$ 的合取范式和析取范式 (10 分).

2. 设解释 R 如下: D_R 是实数集, D_R 中的特定元素 $a = 0$, D_R 中特定函数 $f(x, y) = x - y$, 特定谓词 $F(x, y)$ 为 $x < y$. 在解释 R 下, 下列公式是否为真 (10 分).

(1) $\forall x F(f(a, x), a)$

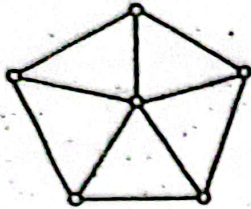
(2) $\forall x \forall y (\neg F(f(x, y), x))$

3. 计算幂集 $P(A)$, $A = P(\{1, 2\})$ (10 分).

4、设 $A = \{a, b, c, d\}$, $R = \{\langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, d \rangle\}$, 求 $r(R), s(R), t(R)$ (10分)。

5 已知图 G 中有 10 条边, 4 个 3 度顶点, 其余顶点度数均小于等于 2, 问 G 中至少有多少个顶点。(10分)

6 判定下图是欧拉图吗? 是哈密尔顿图吗? (10分)



得分

四、证明题 (20 分)

i $A = \{1, 2, \dots, 8\}$, $R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in A \wedge x \equiv y \pmod{3} \}$, 其中

$x \equiv y \pmod{3}$ 的含义就是 $x - y$ 可以被 3 整除。证明 R 是 A 上的等价关系。(10 分)

2 设 S 是集合, $S \neq \emptyset$, $P(S)$ 是 S 的幂集, 证明 $\langle P(S), \oplus \rangle$ 是群 ($\oplus$ 为对称差运

《离散数学》试卷 第 5 页 共 6 页

算)。(10分)

《离散数学》

院(系) _____ 班级 _____ 学号 _____ 姓名 _____

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

得分

一、选择题 (每空 2 分, 共 40 分)

1. 设 R, N, Z 分别表示实数、自然数、整数集, 定义以下函数:

$$f_1: R \rightarrow R, f_1(x) = 2^x; \quad f_2: Z \rightarrow N, f_2(x) = |x|;$$

$$f_3: N \rightarrow N, f_3(n) = (n)_{\text{mod } 3}, \quad n \text{ 除以 } 3 \text{ 的余数}.$$

$$f_4: R \rightarrow R, f_4(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 3 \\ -2, & x < 3 \end{cases}, \quad f_5: R \rightarrow R, f_5(x) = x + 2$$

则 f_1 是 (), f_2 是 (), f_3 是 (), $f_5 \circ f_4$ 是 ().

供选择的答案: (A) 满射不单射; (B) 单射不满射; (C) 双射; (D) 既非单射也非满射.

2. 设 $S = Q \times Q$, 其中 Q 为有理数集. 定义 S 上的二元运算 $*$ 为:

$$\forall \langle a, b \rangle, \langle x, y \rangle \in S, \text{ 有}$$

$$\langle a, b \rangle * \langle x, y \rangle = \langle ax, b + y \rangle$$

则 $\langle S, * \rangle$ 的么元是 ()

供选择的答案: (A) $\langle 0, 0 \rangle$; (B) $\langle 1, 0 \rangle$; (C) $\langle 1, -1 \rangle$; (D) $\langle 1, 1 \rangle$.

2) $\langle S, * \rangle$ 是 ().

供选择的答案: (A) 可交换的; (B) 不可结合的; (C) 有唯一逆元; (D) 无幂等元.

3. 设 $S_1 = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in Q\}$, $S_2 = \{a + bi \mid a, b \in R, i^2 = -1\}$,

$$S_3 = \{2x - 1 \mid x \in Z^+\}, S_4 = \{x \mid x = 2^n, n \in Z^+\}$$

则 S_1 是 (), S_2 是 (), S_3 是 (), S_4 是 ().

供选择的答案: (A) 在普通乘法下封闭, 在普通加法下不封闭;

(B) 在普通加法下封闭, 在普通乘法下不封闭;

(C) 在普通乘法下和普通加法下都封闭;

(D) 在普通乘法下和普通加法下都不封闭.

4. 对以下定义的集合和运算, 判断它们能否构成代数系统? 如果能, 请说明构成的代数系统是什么.

$S_1 = \{\frac{1}{2}, 0, 1, 2\}$, $*$ 为普通乘法, 则 $\langle S_1, * \rangle$ 是 ();

$S_2 = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in R\}$, $+$, $\cdot$ 分别为普通加普通乘, 则 $\langle S_2, +, \cdot \rangle$ 是 ();

$S_3 = \{0, 1\}$, $\cdot$ 为普通乘法, 则 $\langle S_3, \cdot \rangle$ 是 ();

$S_4 = M_n(R)$, 即 n 阶实数方阵, $+$ 为矩阵加法, 则 $\langle S_4, + \rangle$ 是 ();

供选择的答案: (A) 半群, 不是独异点; (B) 独异点, 不是群; (C) 群; (D) 域; (E) 环, 不是域; (F) 代数系统, 但不是以上 5 种; (G) 不是代数系统。

5. 给定下列各图:

(1) $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$, 其中 $V_1 = \{a, b, c, d, e\}$, $E_1 = \{(a, a), (a, b), (b, c), (c, d), (e, b)\}$;

(2) $G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$, 其中 $V_2 = \{a, b, c, d\}$, $E_2 = \{(a, c), (b, c), (c, d), (d, a)\}$;

(3) $G_3 = \langle V_3, E_3 \rangle$, 其中 $V_3 = \{a, b, c, d, e\}$, $E_3 = \{(a, b), (b, e), (e, c), (c, d), (e, d)\}$;

(4) $G_4 = \langle V_4, E_4 \rangle$, 其中 $V_4 = V_1$, $E_4 = \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, e), (e, b)\}$;

(5) $G_5 = \langle V_5, E_5 \rangle$, 其中 $V_5 = V_1$, $E_5 = \{(a, b), (b, b), (c, d), (d, c), (e, b)\}$;

(6) $G_6 = \langle V_6, E_6 \rangle$, 其中 $V_6 = V_1$, $E_6 = \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, c), (e, b)\}$;

在以上 6 个图中, () 为简单图, () 为多重图。

供选择的答案: (A) (1)(3)(6); (B) (2)(4)(5); (C) (2)(3)(6); (D) (1)(4)(5); (E) (2)(3); (F) (4); (G) (4)(6)。

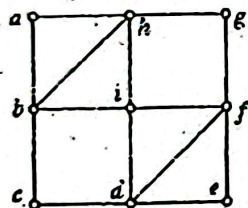
6. 给定下列各序列:

(1) (2, 2, 2, 2, 2); (2) (1, 1, 2, 2, 3); (3) (1, 1, 2, 2, 2); (4) (0, 1, 3, 3, 3); (5) (1, 3, 4, 4, 5)。

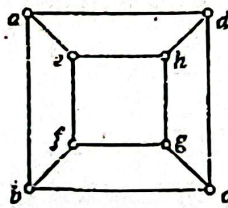
可以构成无向简单图的度数序列是 ()。

供选择的答案: (A) (1)(3)(4); (B) (1)(2); (C) (3)(4)(5); (D) (1)(3)。

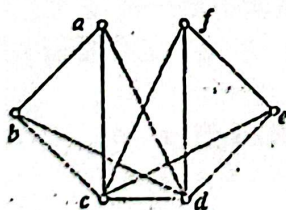
7. 下列图中, () 为欧拉图, () 为哈密顿图, () 为二部图。



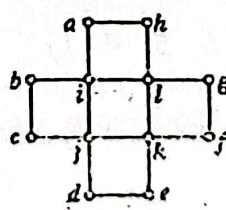
(1)



(2)



(3)



(4)

供选择的答案: (A) (1)(3)(4); (B) (1)(2); (C) (1)(2)(4); (D) (2)(4); (E) (1)(4); (F) (1)(3); (G) (2)(3)(4); (H) (2)(3)。

得分

二、(12分) 画出下列集合关于整除关系的哈斯图，并指出它们的极小元、极大元、最小元、最大元。

(1) $S_1 = \{1, 2, 3, 4, 6, 12, 18, 24\}$

(2) $S_2 = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 36\}$

得分

三、(8分) 设 R 为实数集合，在 R 上定义二元运算 $*$ 为： $\forall x, y \in R$,

$$x * y = x + y - xy$$

问 R 关于 $*$ 运算能否构成群？为什么？

得分

四、(10分) 以下两个置换是 S_6 中的置换，其中

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 6 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 6 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

(1) 试把 σ 和 τ 表示成不交的轮换之积；(2) 求 $\sigma\tau$ 及 $\tau^{-1}\sigma$

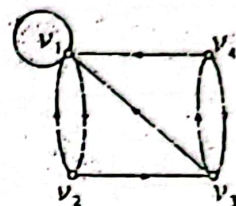
得分

五、(8 分) 在 K_6 的边上涂上红色或蓝色。证明对于任意一种随意的涂法，总存在红色的 K_3 或蓝色的 K_3 。

得分

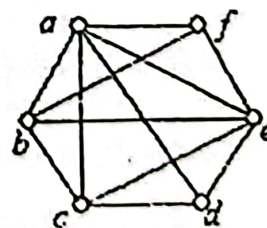
六、计算题 (12 分)

右面是一有向图，求其长度为 4 的通路总数，并指出其中有多少条是回路？ v_3 到 v_4 的通路有多少条？



得分

七、(10 分) 判断右图是否为平面图，若是，请给出它的一个平面嵌入，并指出它是否为极大平面图。



《离散数学》

院(系) _____ 班级 _____ 学号 _____ 姓名 _____

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

得分

一、填空题 (每空 3 分, 共 27 分)

- 命题 $P \rightarrow Q$ 的真值为 0, 当且仅当 _____.
- 设 p : 房价在上涨, q : 我买房. “如果房价上涨, 我就不买房子.” 符号化为 _____.
- 含有 n 个命题变项的互不等价的命题公式有 _____ 个.
- 指出下列各公式的真值: (空格处填“真”或“假”)
 (1) $\forall x (P(x) \vee Q(x))$ 其中 $P(x): x=1, Q(x): x=2$, 论域为 $\{1, 2\}$. _____
 (2) $\exists x P(x) \wedge \neg R(a)$ 其中 $P(x): x$ 是素数, $R(x): x$ 是奇数, $a=2$, 论域为自然数集. _____
- 集合 $A = \{0, \phi, \{0\}\}$ 的幂集 $P(A) =$ _____.
- 设 $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}, B = \{x | x \in E^+ \text{ 且 } x < 7\}$ (E^+ 正偶数) 则 $A \oplus B =$ _____.
- 设集合 $A =$ 奇数集, 自然数集 N 上的关系 $R = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 4, 2 \rangle, \langle 4, 7 \rangle\}$.
 则 $R \setminus A =$ _____, $R[A] =$ _____.
- 设集合 $A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$ 上的偏序关系 $R = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 6 \rangle, \langle 1, 9 \rangle, \langle 1, 18 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 6 \rangle, \langle 2, 18 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 3, 6 \rangle, \langle 3, 9 \rangle, \langle 3, 18 \rangle, \langle 6, 6 \rangle, \langle 6, 18 \rangle, \langle 9, 9 \rangle, \langle 9, 18 \rangle, \langle 18, 18 \rangle\}$, 则偏序集 $\langle A, R \rangle$ 的哈斯图为 _____.

得分

二、选择题 (每空 2 分, 共 20 分)

- 下列语句是命题的为 ()
(1) 每一个自然数皆为偶数; (2) $x > 2$; (3) 2012 年不是末日; (4) 月亮上有神仙.
A. (1)(2)(4); B. (1)(2); C. (1)(3); D. (1)(3)(4)
- “没有不犯错误的人”的逻辑符号化为 ()
(个体域为全总个体域) 设 $H(x)$: x 是人 $P(x)$: x 犯错误:
A. $\exists x(H(x) \rightarrow P(x))$; B. $\neg(\forall x(H(x) \wedge \neg P(x)))$;
C. $\neg(\exists x(H(x) \wedge \neg P(x)))$; D. $\forall x(H(x) \rightarrow P(x))$.
- 设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 则下列 A 上的二元关系 R 是等价关系的是 ()
A. $R = \{\langle x, y \rangle \mid x|y\}$; B. $R = \{\langle x, y \rangle \mid x \equiv y \pmod{2}\}$;
C. $R = \{\langle x, y \rangle \mid x < y\}$; D. $R = \{\langle x, y \rangle \mid x > y\}$
- 命题公式 $p \rightarrow (q \vee r)$ 是 ()
A. 矛盾式; B. 可满足式; C. 重言式; D. 等值式
- 已知 $A = \{1, 2, 3\}$, 则 A 的划分有 () 个.
A. 2 B. 3 C. 5 D. 8
- 设 $A = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}, \{6, 7, 8\}\}$, 下列各式中 () 是正确的.
A. $\emptyset \in A$ B. $\{6, 7, 8\} \in A$; C. $\{\{4, 5\}\} \in A$; D. $\{1, 2, 3\} \in A$
- 设 R 是 X 上的二元关系, 对于 $x \in X$ 定义集合 $R(x) = \{y \mid xRy\} \subseteq X$. 现设 $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $R = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in X \wedge x \text{ 整除 } y\}$, 则 $R(3) =$ ().
A. $\{3\}$; B. $\{6, 9\}$; C. $\{0, 3, 6, 9\}$; D. $\{3, 6, 9\}$.
- 设 R 为 $S = \{1, 2, 3, 4\}$ 上的关系, 其关系矩阵为 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 则 R 的表达式是 ().
A. $\{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 4, 4 \rangle\}$; B. $\{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 4, 0 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 4, 4 \rangle\}$
C. $\{\langle 4, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 4, 4 \rangle\}$; D. $\{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 4, 2 \rangle, \langle 3, 4 \rangle\}$
- 设 $X = \{1, 2, 3\}$, X 上的下列关系中, 不是传递关系的是 ().
A. $\{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$; B. $\{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle\}$;
C. $\{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 1, 3 \rangle\}$; D. $\{\langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 1 \rangle\}$.
- 设 R 是集合 X 上的二元关系, 下列说法错误的是 ().
A. 如果 R 对称, 则 $R = R^{-1}$; B. $R^2 = R \circ R$ 是可传递的;
C. 如果 $R \circ R \subseteq R$, 则 $l(R) = R$; D. 如果 $R \cap R^{-1} \subseteq I_X$, 则 R 是反对称的.

得分

三、计算题 (10分)

求公式 $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$ 的主析取范式和主合取范式, 成真赋值和成假赋值, 并求出公式的类型。

解:

$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$

$p \vee \neg p$

$(p \vee \neg p) \wedge (q \vee \neg q) \wedge (r \vee \neg r)$

展开

分配律

化简

化简

得分
8

四、证明题 (8分)

构造下面推理的证明

如果今天是周六, 我们就到颐和园或动物园玩。如果颐和园游人太多, 就不去颐和园。今天是周六, 并且颐和园游人太多。所以我们去动物园玩。

得分

五、设计题 (6分)

试给出解释 I , 使得下面两个谓词公式在 I 下具有不同的真值:

$\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$ 与 $\forall x(F(x) \wedge G(x))$

得分

六、计算题 (9分)

设集合 $X=\{1,2,3,4\}$, X 上的关系 $R=\{<1,1>, <1,2>, <2,3>, <3,4>\}$, $S=\{<2,2>, <2,3>, <4,1>\}$, 试求 $R \circ S$, $S \circ R$, $R \circ R$.

得分

七、计算题 (10分)

左面是 R 的关系图, 试给出 $s(R)$, $t(R)$ 的关系图.



得分

八、简答题 (10分)

设 $A=\{a,b,c,d,e,f\}$, R 是 A 上的二元关系, 且 $R=\{<a,c>, <c,d>, <d,a>\}$. 设 $R_1=tsr(R)$, 证明 R_1 是 A 上的等价关系, 并求出商集 A/R_1 .

《离散数学》

本试卷共 4 页，考试时间 110 分钟

专业 _____ 班级 _____ 学号 _____ 姓名 _____

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

得分

一、选择题 (40 分, 每题 2 分)

1. 若 P : 你去, Q : 我去, 则“你去我就不去”可表示为 ()

- ☒ A. $P \vee \neg Q$ B. $P \wedge \neg Q$ ☒ C. $P \rightarrow \neg Q$ D. $\neg Q \rightarrow P$

2. 下列命题公式为重言式的是 ()

- A. $P \vee \neg Q \rightarrow P$ ☒ B. $P \wedge \neg Q \rightarrow P$ C. $\neg P \vee \neg Q \rightarrow P$ D. $\neg P \wedge \neg Q \rightarrow P$

3. 下列等价式不成立的是 ()

☒ A. $\neg(\forall x)P(x) \Leftrightarrow (\exists x)\neg P(x)$

B. $\neg(\exists x)P(x) \Leftrightarrow (\forall x)\neg P(x)$

C. $(\forall x)(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow (\forall x)A(x) \vee (\forall x)B(x)$

☒ D. $(\forall x)(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow (\forall x)A(x) \wedge (\forall x)B(x)$

4. 取个体域为整数集, 下列公式为真命题的是 (☒ A)

A. $\forall x \exists y (x \cdot y = 0)$

B. $\forall x \forall y (x \cdot y = y)$

C. $\forall x (x \cdot y = x)$

☒ D. $\exists x \forall y (x + y = 2y)$

5. $\exists x (\exists y \forall z (P(y) \rightarrow Q(z)) \rightarrow R(x))$ 中 $\exists y$ 的作用域是 (☒ B)

A. $P(y)$

☒ B. $\forall z (P(y) \rightarrow Q(z))$

☒ C. $\exists y \forall z (P(y) \rightarrow Q(z))$

D. $\exists y \forall z (P(y) \rightarrow Q(z)) \rightarrow R(x)$

(离散数学) 试卷 第 1 页 共 4 页

6. 设 $A = \{a, b, c\}$, 则 A 上关系 $R = \{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle\}$ 具有 ()
 A. 自反性 B. 对称性 C. 传递性 D. 反自反性

7. 集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{3, 4\}$, 则 $A \times B \times C$ 为 ()
 A. $\emptyset$ B. $\{\langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$ C. $\{\langle 1, 2, 3 \rangle, \langle 1, 2, 4 \rangle, \langle 2, 3, 3 \rangle, \langle 3, 3, 3 \rangle\}$ D. $\{\langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 4 \rangle\}$

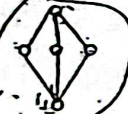
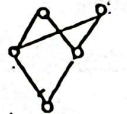
8. 设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 则下列 A 上的二元关系 R 是等价关系的是 ()
 A. $R = \{\langle x, y \rangle \mid x \text{ 整除 } y\}$ B. $R = \{\langle x, y \rangle \mid x \equiv y \pmod{2}\}$ C. $R = \{\langle x, y \rangle \mid x \equiv y \pmod{3}\}$ D. $R = \{\langle x, y \rangle \mid x \equiv y \pmod{4}\}$

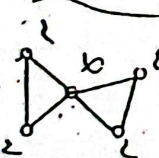
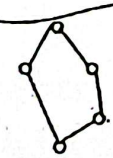
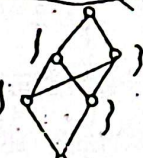
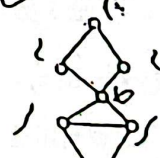
9. 整数集 I 上的下列二元关系 R 是函数的是 ()
 A. $R = \{\langle x, y \rangle \mid x = y\}$ B. $R = \{\langle x, y \rangle \mid |x - y| = 3\}$ C. $R = \{\langle x, y \rangle \mid x \cdot y = 1\}$ D. $R = \{\langle x, y \rangle \mid x = y\}$

10. 设 Z 是整数集, $E = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$, $f: Z \rightarrow E$, $f(x) = 2x$, 则 f ()
 A. 仅是满射 B. 仅是入射 C. 是双射 D. 无逆函数

11. 下列代数系统没有么元的是 ()
 A. $\langle I, + \rangle$ B. $\langle I, \cdot \rangle$ C. $\langle I, \max \rangle$ D. $\langle I, \min \rangle$

12. $\langle R, \cdot \rangle$ 不是 ()
 A. 广群 B. 半群 C. 独异点 D. 群

13. 下列图中哪一个不是格 ()
 A.  B.  C.  D. 

14. 下列图中哪一个既不是欧拉图也不是汉密尔顿图 ()
 A.  B.  C.  D. 

15. $\cdot$ 是 R 上的二元运算, 下列 $\cdot$ 运算中不具有结合性的是 ()
 A. $a \cdot b = a + b + a \cdot b$ B. $a \cdot b = \min(a, b)$

C. $a^b = a + b$

D. $a^b = \max(a, b)$

16. 若无向图中有6条边，有一个3度顶点和一个5度顶点，其余顶点度为2，则该图的顶点数是 ()

A. 3

C. 5

D. 6

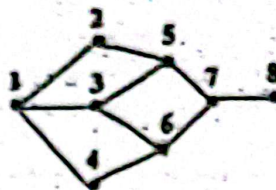
17. 图G如右所示，下列集合不是点割集的是 ()

A. {2, 3, 4}

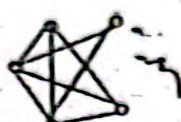
B. {3, 7}

C. {5, 6}

D. {7}



18. 下列图中是欧拉图的为 ()



19. 格中不一定成立的是 ()

A. $a \wedge b = b \wedge a$

B. $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

C. $a \vee (a \wedge b) = a$

D. $a \vee a = a$

20. 具有n个结点的简单图G中每一对结点度数之和大于等于n-1，则G中一定存在一条 ()

A. 欧拉路

B. 欧拉回路

C. 汉密尔顿路

D. 汉密尔顿回路

得分

二、填空题 (10分，每空1分)

1. $\exists x \exists y (P(x) \rightarrow Q(y)) \wedge R(x) \wedge S(z)$ 中约束变元有 x, y，自由变元有 z

2. 一个代数系统是群，除了具有封闭性、可结合性外，还必须存在 单位元、逆元

3. 简单图是不含有 重边 和 环 的图。

4. 格中 $a \wedge b \leq b \vee c$ 的对偶式为 $a \vee b \leq c$

5. 格中若 $a \leq b$ 则 $a \wedge b = \underline{a}$ ， $a \vee b = \underline{b}$

6. 布尔格既是分配格又是 有补格

得分

三、判断题 (10分，每空1分)

1. “集合{1}和{2}相等”是一个命题。 (✓)

2. $P(\emptyset) = \emptyset$ 。 (✗)

3. $\{a, b\} \in \{a, \{b\}, b\}$ 。 (✗)

- 4、论域元素为 $a_1, a_2, \dots, a_n$, 则 $(\forall x)A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \dots \wedge A(a_n)$. (✓)
- 5、 $\langle R, \cdot \rangle$ 中没有零元. (✓)
- 6、实数集 R 是可数集. (✗)
- 7、对布尔代数 $\langle \{0,1\}, \vee, \wedge, - \rangle$, 所有 $f: \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ 都是布尔函数. (✓)
- 8、链一定是分配格. (✓)
- 9、若 G_1 是 G_2 相对于 G 的补图, 则 G_2 一定是 G_1 相对于 G 的补图. (✓)
- 10、强连通图一定是单侧连通的. (✓)

得分

四、解答题 (32 分, 每题 8 分)

1、求 $P \wedge (P \rightarrow Q)$ 的主析取范式和主合取范式.

2、右图为 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 上某二元关系的关系图:

(1) 画出该图对应的哈斯图.

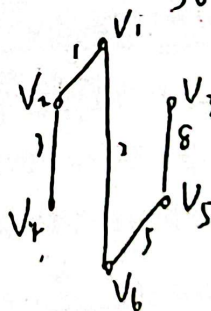
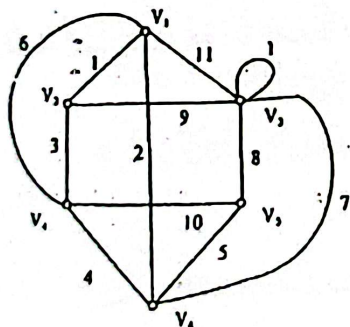
(2) 有子集 $B=\{1, 2, 3\}$, 填写下表

最大元	上界	4 5
最小元	下界	②
极大元	上确界	无
极小元	下确界	②

3、写出右图的邻接矩阵, 并求出可达矩阵.

	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0
3	0	0	0	1	0
4	1	1	0	0	0
5	0	0	0	0	0

4、已知图如下, 求最小生成树.



得分

五、证明题 (8 分)

设 $\langle R, * \rangle$ 是一个代数系统, $a * b = a + b - 5$. 试证明 $\langle R, * \rangle$ 是群.

$$a * b = a + b - 5$$

(离散数学) 试卷 第 4 页 共 4 页

$$b * a = b + a - 5$$

《离散数学》

院(系) _____

班级 _____

学号 _____

姓名 _____

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											86

得分

一、选择与填空 (每格 2 分, 共 30 分)

1. 下面式子为集合 $P = \{a, b, c, d\}$ 的幂集的有 (1), (4)
 (1) $\{\langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle\}$; (2) $\{a, \{b, c\}, \{d\}\}$; (3) $\{\{a\}, \{b, c\}, \{c, d\}\}$; (4) $\{\{a, b, c, d\}\}$.

2. 设 $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, 则 $A^B =$ $2^2 = 4$
 (1) 6; (2) 8; (3) 9; (4) 2.

3. 设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 上的关系为 $R = \{\langle x, y \rangle \mid x \text{ 整除 } y\}$, 则 R' 的性质是 (4) ②
 (1) 对称的; (2) 自反的; (3) 反对称, 反自反, 可传递的; (4) 反对称的.

4. 设 $B = \{a, b, c\}$, $\emptyset$ 为全集, 则它的幂集 $P(B)$ 为 8
 $P(\emptyset) =$ 1.

5. 设 $A = \{1, 2, 3\}$ 上的关系 $R = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 1, 3 \rangle\}$, 则 $R^2 =$ $\{\langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 3 \rangle\}$.

6. 设 $\langle G, * \rangle$ 是有限群, 则: 群的阶数是指 $|G|$ 集合中元素的个数.

群中元素的阶数是指 元素 a 的阶数, 即 $a^n = e$ 的最小正整数 n .

7. 设 $\langle A, +, 0 \rangle$ 是环, 则 $\langle A, + \rangle$ 是阿贝尔群, $\langle A, 0 \rangle$ 是独异点.

8. 设 $\langle A, +, \cdot \rangle$ 是一个代数系统, 其中 $+$ 为普通的加法运算和乘法运算, 指出当 A 为下面的集合时, $\langle A, +, \cdot \rangle$ 是否是域 (在空格处填“是”或“否”):

(1) $A = \{x \mid x = a + b\sqrt{2}, a, b \text{ 均是有理数}\}$ 是; $A = \{x \mid x = a + b\sqrt{2}, a, b \text{ 均是有理数}\}$ 是.

含有 16 个元素的布尔格中共有 4 个原子.

有限布尔格的特征多项式为 $x^n - 1$, 其中 n 是布尔格中所有原子的个数.

10. $(1346, 902) =$ 2, $\phi(168) =$ 48, Jacobi $\phi\left(\frac{24}{11}\right) =$ 1.

得分

二、证明题 (8 分)

设 A, B, C 是三个集合, 且 $A \cap B = A \cap C$, $A \cup B = A \cup C$, 证明 $B = C$.

得分

三、计算题 (8 分)

已知 $A = \{a, b, c, d\}$, A 上的关系 p 为

$$p = \{(a, b), (c, a), (a, c), (b, d), (d, a)\}$$

求出 $r(p), s(p), t(p)$, 并画出它们的关系图.

得分

四、问答题 (8 分)

$$t(p) = M(p) + M^2(p) + M^3(p) + M^4(p)$$

逐个判断下列函数是否入射的, 满射的或双射的, 并说明理由.

(a) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(i) = 2 \cdot i + 1$;

(b) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln|x|$;

(c) $f: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}, f(r) = 2r - 5$.

证明步骤

- ① 证明 ~~运算~~ 封闭
- ② 证明 ~~结合律~~ 结合律保持可结合性
- ③ 么元在子集中
- ④ 存在逆元

得分

五、计算题 (8分)

设 R 是实数集合, $*$ 是 R 上的一个二元运算, 使得对于 R 中的任意元素 a, b 都有 $a*b = a+b-2ab$, 求该运算的么元和零元.

解: $a*b = a+b-2ab$

$e, x = x = e+x-2ex$

$e, 1-2e, x = 0$

$e, (1-2x) = 0$

$x \times e_1 = x = e+x-2ex$

$0 \times x = 0 = 0+x-2 \cdot 0 \cdot x$

$x \times 0 = 0 = 0+x-2 \cdot 0 \cdot x$

$x-2 \cdot 0 \cdot x = 0$

$e = \frac{1}{2}$

得分

六、讨论题 (6分)

已知 $\langle R, + \rangle$ 是实数集上的加法群, 设

$$f: x \rightarrow e^{2\pi i x}, x \in R$$

问 f 是同态像否? 如果是, 请写出同态像和同态核.

解: 是同态像 对于任意 $a, b \in R$

$$f(a+b) = e^{2\pi i(a+b)} = e^{2\pi i a} \cdot e^{2\pi i b} = f(a) \cdot f(b)$$

即 $f(a+b) = f(a) \cdot f(b)$

所以 f 是 $\langle R, + \rangle$ 到 $\langle C, \cdot \rangle$ 的同态. 这里 $\langle C, \cdot \rangle$ 是复数集上的乘法群

因为 $e^{2\pi i x} = \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x$ 所以 f 的同态像是 $\{ \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x \mid x \in R \}$, 它是一个

得分

七、证明题 (6分)

其么元为 1 同态核即 $K = \{x \mid x \in R, f(x) = 1\} = K = 2k$

设 $(Z_p, +_p, \times_p)$ 是一个域, 证明 p 是素数. 其中 $Z_p = \{0, 1, \dots, p-1\}$, $+$ 和 $\times$ 分别是模 p 加和模 p 乘运算.

得分

八、证明题 (8分)

若 $n > 1$, 试证比 n 小与 n 互素的正整数之和等于 $\frac{n\phi(n)}{2}$.

证明

得分

九、计算题 (10分)

求下列同余方程组的最小正整数解.

$$x \equiv 1 \pmod{2}, x \equiv 2 \pmod{3}, x \equiv 2 \pmod{5}, x \equiv 4 \pmod{11}$$

同余方程组

$$x \equiv 257 \pmod{330}$$

得分

十、证明题 (8分)

设 $(A, \leq)$ 是一个有界格, 对于 A 中任意两个元素 x, y , 证明

a) 若 $x \vee y = 0$ 则 $x = y = 0$

b) 若 $x \wedge y = 1$ 则 $x = y = 1$

证明: 若 $x \vee y = 0$ 则 $x \leq 0$ 且 $y \leq 0$

由于 0 是下界, 故不可能 $x < 0$ 或 $y < 0$. $\therefore x = 0, y = 0$

若 $x \vee y = 0$

若 $x \wedge y = 1$ 则 $x \geq 1$ 且 $y \geq 1$. 由于 1 是上界, 故不可能

$x > 1$ 或 $y > 1$

$\therefore x = 1, y = 1$

有界格与代数系统: 代数系统 $(A, \wedge, \vee)$ 满足

《 离散数学 》

院(系) _____ 班级 _____ 学号 _____ 姓名 _____

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

得分

一、选择与填空 (每格 2 分, 共 30 分)

1. 设 A, B 是集合

(1) 如果 $A = \{1\}$, $B = \{1, \{1, 2\}\}$, 则 C.

(2) 如果 $A = \{\emptyset\}$, $B = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, 则 A.

供选项: (A) $A \in B$ 且 $A \subseteq B$; (B) $A \in B$ 但 $A \not\subseteq B$; (C) $A \notin B$ 但 $A \subseteq B$; (D) $A \notin B$ 且 $A \not\subseteq B$.

2. 设 $A = \{a, b, c\}$, 则 A 上有 8 个等价关系.

3. 设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 上的关系为 $R = \{\langle x, y \rangle \mid x < y\}$, 则 R^* 的性质是 BC.

(A) 对称的; (B) 反自反的; (C) 反对称、可传递的; (D) ABC 皆不对.

4. 设 $A = \{x \mid 0 < x < 1, x \text{ 为实数}\}$, B 为实数集, 则它们基数的关系为 A.

(A) $K[A] < K[B]$; (B) $K[B] < K[A]$; (C) $K[A] = K[B]$; (D) 不可比较.

5. 设 $A = \{1, 2\}$, $B = \{0, 1, 2\}$, 那么可以定义 6 种不同的 A 到 B 的入射函数.

6. 设 $\langle G, * \rangle$ 是半群, 其中 $G = \{a, b, c\}$, 且有 $a * a = b$, $b * b = c$, 则 $a * c =$ AC.

(A) a ; (B) b ; (C) c ; (D) 无法确定.

7. 设 $\langle G, * \rangle$ 是一个 11 阶群, 则下面关于该群的叙述错误的是 C.

(A) 是循环群; (B) 是交换群; (C) 有且只有一个零元; (D) 没有非平凡子群.

8. 设环 $\langle A, +, \circ \rangle$ 同态于 $\langle B, \oplus, \otimes \rangle$, 同态映射为 f , 则 $\langle f(A), \oplus, \otimes \rangle$ 是 A.

(A) 环; (B) 半环; (C) 含么环; (D) 整环.

9. 设 A 为 24 正因子集合, 即 $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$, $\leq$ 为整除关系, 则 C.

(A) $\langle A, \leq \rangle$ 是布尔格; (B) $\langle A, \leq \rangle$ 是有补格;

(C) $\leq$ 是偏序关系; (D) $\langle A, \leq \rangle$ 是全序集.

10. 最大公约数 $(4876, 652) =$ 4; $3721 = (13564)_7$ (表示为 7 进制).

$\phi(354) =$ 96; Legendre 符号 $\left(\frac{355}{1373}\right) =$ -1.

11. 下图表示的格中, 为分配格的是 (a), (b) (可多选).

(集合论与代数系统(含数论)) 试卷 A 第 1 页 共 4 页



得分

二、证明题 (8分)

设 A, B, C 是三个任意集合, 证明 $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

证: ① $\forall \langle x, y \rangle \in (A \cap B) \times C \Rightarrow x \in A \cap B, y \in C \Rightarrow x \in A \wedge x \in B, y \in C \Rightarrow (x \in A, y \in C) \wedge (x \in B, y \in C)$
 $\Rightarrow \langle x, y \rangle \in A \times C \wedge \langle x, y \rangle \in B \times C \Rightarrow \langle x, y \rangle \in (A \times C) \cap (B \times C) \therefore (A \cap B) \times C \subseteq (A \times C) \cap (B \times C)$
 ② $\forall \langle x, y \rangle \in (A \times C) \cap (B \times C) \Rightarrow \langle x, y \rangle \in A \times C \wedge \langle x, y \rangle \in B \times C \Rightarrow (x \in A, y \in C) \wedge (x \in B, y \in C)$
 $\Rightarrow x \in A \wedge x \in B, y \in C \Rightarrow x \in A \cap B, y \in C \Rightarrow \langle x, y \rangle \in (A \cap B) \times C \Rightarrow (A \times C) \cap (B \times C) \subseteq (A \cap B) \times C$

得分

三、计算题 (8分)

已知 $A = \{a, b, c, d\}$, A 上的关系 p 为

$$p = \{(a, a), (a, d), (a, c), (b, c), (d, b)\}$$

求出 $r(p), s(p), t(p)$, 并画出它们的关系图.

解: ① $M_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

② $M_{s(p)} = M_p \oplus M_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$M_{r(p)} = M_p \oplus M_{s(p)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore S(p) = \{(a, a), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (c, a), (c, b), (d, a), (d, b)\}$

③ $M_{t(p)} = M_p \oplus M_p \oplus M_p \oplus M_p =$

$\therefore r(p) = \{(a, a), (a, c), (a, d), (b, b),$

$\therefore t(p) =$

$\{(b, c), (c, c), (c, d), (d, d)\}$

得分

四、问答题 (8分)

设 a, p 皆为正整数, p 为正奇素数, a, p 互素, A 为模 p 的剩余类集合, 定义函数 $f: A \rightarrow A, f(x) = ax \bmod p$. 试判断 f 是否入射的, 满射的或双射的, 并说明理由.

得分

五、证明题 (8分)

设 $(G, \circ)$ 是群, $a \in G$, 令 $H = \{y \mid y \circ a = a \circ y, y \in G\}$, 试证 $(H, \circ)$ 是 $(G, \circ)$ 的子群.

证明: $\because \langle G, \circ \rangle$ 是群 $\therefore G$ 非空
 $\therefore H = \{y \mid y \circ a = a \circ y, y \in G\}$
 $\therefore H \subseteq G$ 非空子集
 下面证明 H 是子群.
 $\forall y_1, y_2 \in H$

$$\begin{aligned} (y_1 \circ y_2) \circ a &= y_1 \circ (y_2 \circ a) = y_1 \circ (a \circ y_2) \\ &= (y_1 \circ a) \circ y_2 = (a \circ y_1) \circ y_2 \\ &= a \circ (y_1 \circ y_2) \end{aligned}$$

$\therefore y_1 \circ y_2 \in H$

$e \circ a = a \circ e \Rightarrow e \in H$ 证

得分

六、证明题 (6分)

证明由群 $\langle G, \circ \rangle$ 的一个子群 $\langle S, \circ \rangle$ 所确定的陪集中, 只有一个陪集是子群.

证明: 设 $a \in G$, aS 是包含 a 的陪集.

取 $a \in aS$ 且 $e \in aS$, 则 $a = e$.

则 $aS = S$, S 是子群.

假设另一陪集 $a'S$ 也是子群, 则 $a' \in a'S$ 且 $e \in a'S$, 则 $a' = e$.

则 $a'S = S$.

由陪集性质, 在 aS 中, 有 $a \circ s_1 = e$, 则 $s_1 = a^{-1}$.

下面 $aS = S$, 对 $\forall a \circ s \in aS$, 则 $a \circ s = s_1 \circ s \in S$, 即 $aS \subseteq S$.

反之, 对 $\forall s \in S$, 有 $s = a \circ a^{-1} \circ s = a \circ (a^{-1} \circ s) = a \circ (s_1 \circ s) \in aS$.

则 $S \subseteq aS$.

故 $S = aS$, $\therefore S$ 是陪集中唯一的子群. 证

得分

七、证明题 (6分)

设 $(A, +, \times)$ 是一个环, 并且对于任意的 $a \in A$, 有 $a \times a = a$, 证明: 对于任意的 $a \in A$, 都有 $a + a = 0$, 其中 0 为加法幺元.

证明: $\because \langle A, +, \times \rangle$ 是一个环

$\therefore \times$ 对于 $+$ 是分配律

即: $\forall a \in A$ 有 $a \times (a + a) = a \times a + a \times a$

$\therefore \forall a \in A$ 有 $a \times a = a$

$\therefore a \times (a + a) = a \times a + a \times a = a + a, \forall a \in A$

$\therefore a + a = 0, \forall a \in A$.

$$a \times (a + a) = a \times a + a \times a = a + a$$

$$\Rightarrow (a + a) \times (a + a) = a + a$$

$$\Rightarrow a \times a + a \times a + a \times a + a \times a = a + a$$

$$\Rightarrow (a + a + a + a) = a + a$$

$$\Rightarrow a + a = 0$$

证

得分

九、证明题 (8分)

设 $n > 2$, 证明在 n 与 $n!$ 之间一定有素数存在, 并由此证明素数有无穷多个.

证法① 若 n 为素数, 则结论已真

若 n 为合数, 设小于 n 的素数全体为 P , n 的素因数集合为 F .

设 $p_1, p_2, \dots, p_k$ 属于 P 但不属于 F 的素数全体

设 $m = p_1 p_2 \cdots p_k n + 1$

则 $m - 1$ 小于 $n!$ 并且大于 n

如果 n 和 $n!$ 之间没有素数, 则小于 $n!$ 的合数素数也是 P .

但 P 中每一个素数都不能整除 m , 故 m 是素数.

故 n 和 $n!$ 之间有素数存在!

② 若 n 与 $n!$ 之间有一素数 P ($P > n$)

则 P 与 $P!$ 之间必有素数, 设 P_1 ($P_1 > P$)

$P_1 < P_1!$... 设 P_2 ($P_2 > P_1$)

如此继续, 将得到无穷多个素数

自觉遵守
考试规则
诚信考试
绝不作弊

得分

九、计算题 (10分)

求下列同余方程组的最小正整数解.

$$x \equiv 1 \pmod{2}, x \equiv 2 \pmod{3}, x \equiv 3 \pmod{5}, x \equiv 4 \pmod{7}$$

解: $M = 2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210, M_1 = 105, M_2 = 70, M_3 = 42, M_4 = 30$

解 $105y_1 \equiv 1 \pmod{2}$ 得 $y_1 = 1$, 解 $70y_2 \equiv 2 \pmod{3}$ 得 $y_2 = 2$

解 $42y_3 \equiv 3 \pmod{5}$ 得 $y_3 = 4$, 解 $30y_4 \equiv 4 \pmod{7}$ 得 $y_4 = 2$

则 $x = 1 \times 105 \times 1 + 2 \times 70 \times 2 + 3 \times 42 \times 4 + 4 \times 30 \times 2 = 1129$

$\therefore 1129 \equiv 79 \pmod{210}, \therefore x_{\min} = 79$

得分

十、证明题 (8分)

设 $a, b_1, b_2, \dots, b_r$ 都是布尔代数 $(A, \vee, \wedge, -)$ 的原子, 那么

$a \leq (b_1 \vee b_2 \vee \dots \vee b_r)$ 当且仅当存在着 i ($1 \leq i \leq r$) 使得 $a = b_i$.

证明: ① $a, b_1, \dots, b_r$ 是布尔代数的原子. ② 当 $a = b_i$ 时, 显然有

$a \wedge b_i = a$ ($i = 1, 2, \dots, r$)

或 $a = b_i$ ($i = 1, 2, \dots, r$)

若 $a \wedge b_i = 0$ ($i = 1, \dots, r$)

则 $a \leq b_i$ ($i = 1, \dots, r$) 不成立.

故 $a \leq (b_1 \vee b_2 \vee \dots \vee b_r)$ 不成立.

$\therefore$ 若在 $1 \leq i \leq r$ 使 $a = b_i$.

$b_i \leq b_1 \vee b_2 \vee \dots \vee b_r$ ($i \leq r$)

$\therefore a \leq (b_1 \vee b_2 \vee \dots \vee b_r)$

证上...

离散参考样卷

一、填空题(20分)

1. 设 P : 我有时间, Q : 我将去市里, 将“只有我有时间, 我才去市里”命题符号化 _____.

答案: $(Q \rightarrow P)$

2. 公式 $(\forall x)(P(x, y) \rightarrow Q(x, y)) \vee (\exists z)R(y, z) \rightarrow S(x)$ 中自由变元为 _____, 约束变元为 _____.

答案: $(x, y), (x, z)$

3. 设 $F = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 2, 2 \rangle \}$, $G = \{ \langle 4, 2 \rangle, \langle 2, 5 \rangle, \langle 3, 1 \rangle \}$, 则 $F \circ G =$ _____.

答案: $\{ \langle 4, 2 \rangle, \langle 3, 2 \rangle \}$

4. 代数系统 $\langle Z, + \rangle$ (其中 Z 是整数集合, $+$ 是普通加法), Z 对 $+$ 的么元为 _____, 零元为 _____, 任 $x \in Z, x^{-1} =$ _____.

答案: 0, 不存在, $-x$

二、选择题(10分)

1. 下面 4 个推理定律中, 不正确的为 ().

- A. $A \Rightarrow (A \vee B)$ (附加律)
- B. $(A \vee B) \wedge \neg A \Rightarrow B$ (析取三段论)
- C. $(A \rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$ (假言推理)
- D. $(A \rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow A$ (拒取式)

答案: D

2. 下列四个命题中哪一个为真? ().

- A. $\emptyset \in \emptyset$
- B. $\emptyset \in \{a\}$
- C. $\emptyset \in \{\{\emptyset\}\}$
- D. $\emptyset \subseteq \emptyset$

答案: D

3. 设 $S = \{a, b, c, d\}$, $R = \{ \langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle d, d \rangle \}$, 则 R 的性质是 ().

- A. 自反、对称、传递的
- B. 对称、反对称、传递的
- C. 自反、对称、反对称的
- D. 只有对称性

答案: B

4. 下列四组数据中, 不能成为任何 4 阶无向简单图的度数序列的为 ().

- A. 2, 2, 2, 2
- B. 1, 1, 1, 3
- C. 1, 1, 2, 3
- D. 1, 2, 2, 3

答案: C

5. 设 $A = \{a, b, c\}$, 则下列是集合 A 的划分的是 ().

- A. $\{\{b, c\}, \{c\}\}$
- B. $\{\{a, b\}, \{a, c\}\}$
- C. $\{\{a, b\}, c\}$
- D. $\{\{a\}, \{b, c\}\}$

答案: D

三、解答题 (6 题共 42 分)

1. 设集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$, R 是 A 上的整除关系.

(1) 画出偏序集 (A, R) 的哈斯图:

(2) 写出 A 的子集 $\{2, 4, 6, 8\}$ 的上界, 下界, 最小上界, 最大下界:

(3) 写出集合 A 的最大元, 最小元, 极大元, 极小元.

解: (1) 偏序集(A, R)的哈斯图



(2) 子集{2, 4, 6, 8}无上界, 下界是 1, 2, 无最小上界, 最大下界是 2.

(3) A 无最大元, 最小元是 1, 极大元是 8, 12, 极小元是 1.

2、求 $(\neg P \rightarrow Q) \wedge (R \vee P)$ 的主析取范式和主合取范式

解: $(\neg P \rightarrow Q) \wedge (R \vee P)$

$= (P \vee Q) \wedge (R \vee P)$ (合取范式)

$= (P \vee Q \vee (R \wedge \neg R)) \wedge (P \vee (Q \wedge \neg Q) \vee R)$

$= (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R)$

$= (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R)$ (主合取范式)

$= \prod(0, 1, 2)$ (主合取范式)

$= \sum(3, 4, 5, 6, 7)$ (主析取范式)

3、设 f 是一元运算, P 是一元谓词, Q 是二元谓词, 给定解释 I :

$D = \{2, 3\}$, $f(2) = 3$, $f(3) = 2$, $P(2) = 1$, $P(3) = 0$

$Q(2, 2) = Q(3, 3) = 1$, $Q(2, 3) = Q(3, 2) = 0$

求在解释 I 下 $\forall x \exists y (Q(f(x), y) \rightarrow P(x))$ 的真值.

解: $\forall x \exists y (Q(f(x), y) \rightarrow P(x))$

$\Leftrightarrow \forall x \exists y (\neg Q(f(x), y) \vee P(x))$

$\Leftrightarrow \forall x (\neg Q(f(x), 2) \vee \neg Q(f(x), 3) \vee P(x))$

$\Leftrightarrow (\neg Q(f(2), 2) \vee \neg Q(f(2), 3) \vee P(2))$

$\quad \wedge (\neg Q(f(3), 2) \vee \neg Q(f(3), 3) \vee P(3))$

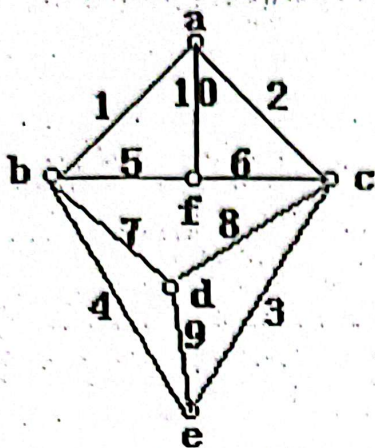
$\Leftrightarrow (\neg Q(3, 2) \vee \neg Q(3, 3) \vee P(2))$

$\quad \wedge (\neg Q(2, 2) \vee \neg Q(2, 3) \vee P(3))$

$\Leftrightarrow (1 \vee 0 \vee 1) \wedge (0 \vee 1 \vee 0)$

$\Leftrightarrow 1 \wedge 1$

4、如图给出的赋权图表示六个城市及架起城市间直接通讯线路的预测造价。试给出一个设计方案使得各城市间能够通讯且总造价最小，并计算出最小总造价。



解：（最小生成树的应用）其树权即最小造价为：1+2+3+5+7=18

5、化简集合式子

$$((A \cup B \cup C) \cap (A \cup B)) - ((A \cup (B - C)) \cap A)$$

解：原式 = $(A \cup B) - A$

$$= (A \cup B) \cap \sim A$$

$$= (A \cap \sim A) \cup (B \cap \sim A)$$

$$= B - A$$

6、(1) 设 $G_1 = \langle \mathbb{R}, + \rangle$ 是实数加群， $G_2 = \langle \mathbb{R}^*, \cdot \rangle$ 是非零实数关于普通乘法构成的群。令 $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*, \varphi(x) = e^x$

请问 φ 是 G_1 到 G_2 的同态映射吗？

(2) 设 G_1, G_2 是群， e_2 是 G_2 的幺元。令

$$\varphi: G_1 \rightarrow G_2, \varphi(a) = e_2, \forall a \in G_1$$

φ 是 G_1 到 G_2 的同态映射吗？

解：(1) φ 是 G_1 到 G_2 的同态，因为 $\forall x, y \in \mathbb{R}$ 有

$$\varphi(x+y) = e^{x+y} = e^x \cdot e^y = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$$

因为 $\varphi: G_1 \rightarrow G_2$ 是单射的，则称 φ 为单同态

(2) 因为 $\forall a, b \in G_1$ 有

$$\varphi(ab) = e_2 = e_2 e_2 = \varphi(a)\varphi(b)$$

因为 $\varphi: G_1 \rightarrow G_2$ 不单射不满射, φ 不是单同态也不是满同态。

四、证明题 (14 分)

1、证明: $P \rightarrow (Q \rightarrow R) \wedge (\neg S \vee P) \wedge Q \Rightarrow S \rightarrow R$

证明: (1) S 附加前提引入
 (2) $\neg S \vee P$ 前提引入
 (3) $S \rightarrow P$ (2) 置换
 (4) P (1)(3) 假言推理
 (5) $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$ 前提引入
 (6) $Q \rightarrow R$ (4)(5) 假言推理
 (7) Q 前提引入
 (8) R (4)(5) 假言推理
 (9) $S \rightarrow R$ CP 规则

2、 I 上的二元运算 $*$ 定义为: $a, b \in I, a * b = a + b - 2$ 。试证: $\langle I, * \rangle$ 为群。

证明:

(1) 对任意的 $a, b \in I, a * b = a + b - 2 \in I$, 所以 I 对于二元运算 $*$ 是封闭的。

(2) $a, b, c \in I, (a * b) * c = (a + b - 2) * c = (a + b - 2) + c - 2 = a + b + c - 4$,
 $a * (b * c) = a + (b + c - 2) - 2 = a + b + c - 4$ 。故 $(a * b) * c = a * (b * c)$, 从而 $*$ 满足结合律。

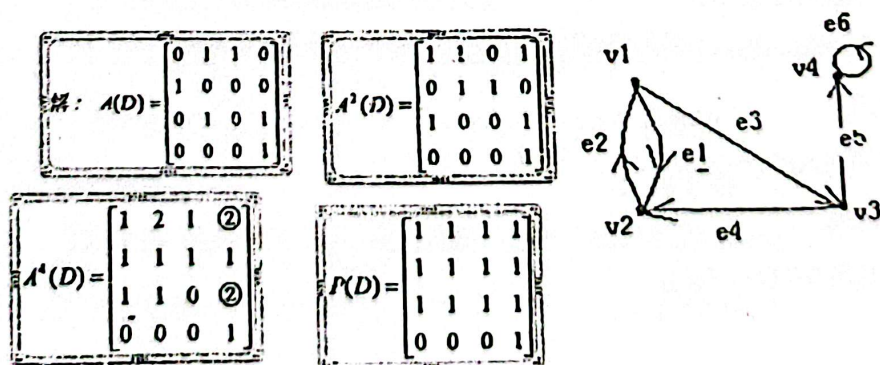
(3) 记 $e = 2$ 。对 $a \in I, a * 2 = a + 2 - 2 = a = 2 + a - 2 = 2 * a$ 。故 $e = 2$ 是 I 关于运算 $*$ 的幺元。

(4) 对 $a \in I$, 因为 $a * (4 - a) = a + 4 - a - 2 = 2 = e = 4 - a + a - 2 = (4 - a) * a$ 。故 $4 - a$ 是 a 关于运算 $*$ 的逆元。

综上所述, $\langle I, * \rangle$ 为群。

五、应用题 (14 分)

例如: 在有向图 D (如下图) 中, 求从结点 v_1 到 v_4 长度为 4 的所有通路条数 (要求写出), 从 v_3 到 v_4 长度为 4 的通路有几条? 该有向图是哪种连通图?



由 $P(D)$ 可知, 该有向图是单向连通图。

选择题

1. Φ 为空集, 下列式子中正确的是 (D)
 - A. $\Phi=0$
 - B. $\Phi \in \Phi$
 - C. $\Phi=\{\Phi\}$
 - D. $\Phi \subset \{\Phi\}$
2. 设 A 为集合, $|A|=n$, 则 A 上的二元关系数量是 (C)
 - A. 2^n
 - B. n^2
 - C. 2^{n^2}
 - D. 2^n
3. 下列关于映射的描述, 正确的是 (C)
 - A. 一个映射的逆映射一定存在
 - B. 任意两个映射一定可复合
 - C. 恒等映射必是一一对应的
 - D. 映射可以是多对多的
4. 设群 G 的阶是 6, 则其中元素的阶不可能是 (D)
 - A. 1
 - B. 2
 - C. 3
 - D. 4
5. 设群 G 的阶是 12, $a \in G$, 其阶为 12, $b=(a^{-1})^4$, 则 b 的阶为 (A)
 - A. 3
 - B. 8
 - C. 12
 - D. 24
6. 关于整环和域的关系, 下列描述中正确的是 (C)
 - A. 整环一定是域
 - B. 有限域未必是整环
 - C. 有限整环一定是域
 - D. 域一定是有限整环
7. 仅由一个孤立点组成的图称为 (B)
 - A. 二分图
 - B. 平凡图
 - C. 多重图
 - D. 子图
8. 一个连通的无向图 G , 如果它的所有结点的度数都是偶数, 那么它具有 (B)
 - A. 哈密尔顿回路
 - B. 欧拉回路
 - C. 哈密尔顿通路
 - D. 初级回路
9. 下列语句中不是命题的是 (B)
 - A. 3 是素数
 - B. $x+y>1$
 - C. 地球外的星球上也有人
 - D. 雪是黑的
10. 设个体域 $A=\{a, b\}$, 公式 $(\forall x)P(x) \wedge \exists xS(x)$ 在 A 上消去量词应为 (D)
 - A. $P(x) \wedge S(x)$
 - B. $P(a) \wedge P(b) \wedge S(a) \vee S(b)$
 - C. $P(a) \wedge S(b)$
 - D. $P(a) \wedge P(b) \wedge (S(a) \vee S(b))$

11. Φ 为空集, 下列各式中不正确的是 (B)

- A. $\Phi \subseteq \Phi$
B. $\Phi \in \Phi$
C. $\Phi \subseteq (\Phi)$
D. $\Phi \in (\Phi)$

12. 设集合 $A=\{1,2,3\}$, A 上的关系 $R=\{(1,1),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)\}$, 则 R 不具备 (D)

- A. 自反性 B. 传递性
C. 对称性 D. 反对称性

13. 下列关于映射的描述, 正确的是 (C)

- A. 映射一定是一对一的
B. 映射可以是一对多的
C. 映射可以是多对一的
D. 映射可以是多对多的

14. 下列关于代数系统的描述, 错误的是 (D)

- A. 群一定是半群
B. 单元半群中必有等幂元
C. 阶相同的循环群必同构
D. 两个代数系统同态必同构

15. 设群 G 的阶是 8, 则其中元素的阶不可能是 (C)

- A. 1 B. 2
C. 3 D. 4

16. 设 $S=\{0,1,2,3\}$, $\leq$ 为小于等于关系, 则 $\{S, \leq\}$ 是 (D)

- A. 群 B. 环
C. 域 D. 格

17. 无向图 G 是欧拉图, 当且仅当 (D)

- A. G 的所有结点的度数全为偶数
B. G 中所有结点的度数全为奇数
C. G 连通且所有结点度数全为奇数
D. G 连通且所有结点度数全为偶数

18. 设 G 是有 5 个顶点的完全图, 如果要得到树, 那么应从 G 中删去 (B)

- A. 4 条边 B. 6 条边
C. 8 条边 D. 10 条边

19. 设 P : 我们划船, Q : 我们跳舞, 命题“我们不能既划船又跳舞”符号化为 (B)

- A. $P \vee Q$ B. $\neg (P \wedge Q)$

- C. $\neg P \wedge \neg Q$ D. $\neg P \wedge Q$
20. 一阶公式 $\forall x(P(x) \vee \exists yR(y)) \rightarrow Q(x)$ 中量词 $\forall x$ 的辖域是 (A)
- A. $(P(x) \vee \exists yR(y))$ B. $P(x)$
C. $\forall x(P(x) \vee \exists yR(y))$ D. $(P(x) \vee \exists yR(y)) \rightarrow Q(x)$
21. Φ 为空集, 下列命题正确的是 (A)
- A. $\Phi \cap \{\Phi\} = \Phi$ B. $\Phi \cup \{\Phi\} = \Phi$
C. $\{n\} \in \{a, b, c\}$ D. $\Phi \in \{a, b, c\}$
22. 设集合 $A = \{a, b, c\}$, A 上的关系 $R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, b)\}$, 则 R 是 (B)
- A. 自反关系 B. 传递关系
C. 对称关系 D. 反自反关系
23. 设 $|A|=m$, $|B|=n$ 则从 A 到 B 所有的映射个数为 (B)
- A. m^n B. n^m
C. 2^{mn} D. mn
24. 设群 G 的阶是 12, 则其中元素的阶不可能是 (D)
- A. 1 B. 2
C. 4 D. 8
25. 下列关于群与子群的描述, 错误的是 (A)
- A. 群的任意两个子群的并一定还是子群
B. 子群一定是群
C. 子群中任一元素的逆元一定是它在群中的逆元
D. 子群中的单位元素一定是群中的单位元素
26. 设 $(G, *)$ 为阿贝尔群, $a, b \in G$, a, b 的阶分别为 3 和 5, 则 $a * b$ 的阶为 (D)
- A. 3 B. 5 C. 8 D. 15
27. 在任何图 $G = \langle V, E \rangle$ 中, 顶点总度数和边数的关系为 (C)
- A. $\deg(v) = 2|E|$ B. $\deg(v) = |E|$
 $v \in V$ $v \in V$

C. $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$

D. $\sum_{v \in V} \deg(v) = |E|$

28. 设 G 是连通平面图, 有 5 个顶点, 6 个面, 则 G 的边数是 (C)

A. 5 条

B. 6 条

C. 9 条

D. 11 条

29. 令 P : 今天下雪了, Q : 路滑, 则命题“虽然今天下雪了, 但是路不滑”可符号化为 (D)

A. $P \rightarrow \neg Q$

B. $P \vee \neg Q$

C. $P \wedge Q$

D. $P \wedge \neg Q$

30. 设论域为整数集, 下列公式中值为真的是 (A)

A. $\forall x \exists y (x + y = 0)$

B. $\exists y \forall x (x + y = 0)$

C. $\forall x \forall y (x + y = 0)$

D. $\neg \exists x \exists y (x + y = 0)$

31. 下列各式中不正确的是 (B)

A. $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$

B. $\{a, b\} \in \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$

C. $\{a, b\} \in \{a, b, \{a, b\}\}$

D. $\{a, b\} \in \{\{a, b\}\}$

32. 设集合 $A = \{1, 2, 3\}$, A 上的关系 $R = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle \}$,

则 R 不具备 (B)

A. 传递性

B. 对称性

C. 自反性

D. 反对称性

33. 设 N 是自然数集, R 为实数集, $f: N \rightarrow R$, 其中 $f(n) = \sqrt{n}$, 则 f 是 (A)

A. 入射

B. 满射

C. 一一对应映射

D. 不是映射

34. 设群 G 的阶是 6, H 是 G 的子群, 则 H 的阶不可能是 (D)

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

35. 下列关于格的描述, 正确的是 (B)

A. 格中任意两个元素都是可比较的

B. 格一定满足反对称性

C. 有补格一定是分配格

D. 分配格一定是有补格

36. 设 G 为有 n 个结点的无向完全图, 则 G 的边数为 (A)

A. $\frac{n(n-1)}{2}$

B. $\frac{(n-1)}{2}$

C. $n(n-1)$

D. $n(n+1)$

37. 设 G 是连通平面图, G 中有 8 个顶点 12 条边, 则 G 的面的数目是 (C)

A. 2 个面

B. 4 个面

C. 6 个面

D. 8 个面

38. 设图 G 是有 6 个顶点的连通图, 总度数为 20, 则从 G 中删去多少条边使之变成树? (B)

A. 10

B. 5

C. 3

D. 2

39. 下面联结词集中, 不属于联结词的极小全功能集的是 (D)

A. $\{\neg, \wedge\}$

B. $\{1\}$

C. $\{\uparrow\}$

D. $\{\neg, \wedge, \vee\}$

40. 设论域为整数集, 下列公式中值为假的是 (D)

A. $\forall x \exists y (x \cdot y = 0)$

B. $\exists y \exists x (x \cdot y = 2)$

C. $\forall x \forall y \exists z (x - y = z)$

D. $\forall x \exists y ((x \cdot y) = 1)$

41. 设 $A = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}, \{6, 7, 8\}\}$, 下列式子中正确的是 (C)

A. $1 \in A$

B. $\{1, 2, 3\} \subseteq A$

C. $\{\{4, 5\}\} \subset A$

D. $\Phi \in A$

42. 设 R 是集合 $A = \{a, b, c, d\}$ 上的二元关系, $R = \{\langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle a, d \rangle, \langle c, b \rangle, \langle d, b \rangle, \langle d, c \rangle\}$,

则 R 具有 (D)

A. 自反性、反对称性

B. 反自反性、传递性

C. 自反性、对称性

D. 反对称性、传递性

43. 设 R 为实数集, R^+ 为正实数集, $f: R \rightarrow R^+$, 其中 $f(x) = x^2$, 则 f 是 (D)

A. 入射

B. 满射

C. 一一对应映射

D. 不是映射

44. 设群 G 的阶是 8, H 是 G 的子群, 则 H 的阶不可能是 (C)

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

45. 下列关于群的描述, 错误的是 (B)

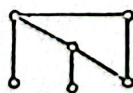
A. 群中没有零元

B. 群中没有等幂元

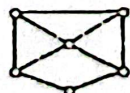
C. 群中每个元素都有逆元

D. 群中满足消去律

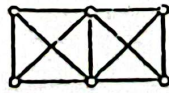
46. 下列可以一笔画出的图形是 (D)



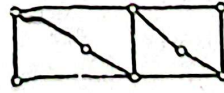
A.



B.



C.



D.

47. 下列关于树的描述, 正确的是 (B)

A. 树是不连通的

B. 树中增加任意一条边后必有回路

- C. 二叉树中每个结点的次数必定是 2 D. 树中每个结点的次数一定不小于 2
48. 下面联结词不满足交换律的是 (B)
- A. $\wedge$ B. $\rightarrow$ C. $\vee$ D. $\leftrightarrow$
49. 下列命题公式中属于重言式的是 (D)
- A. $(P \vee R) \wedge (P \rightarrow Q)$
 B. $P \rightarrow (Q \vee R)$
 C. $(P \vee Q) \leftrightarrow (Q \vee R)$
 D. $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$
50. 下面的逻辑等价式中, 不正确的是 (B)
- A. $A \rightarrow \forall x B(x) \Leftrightarrow \forall x (A \rightarrow B(x))$
 B. $\forall x (A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \forall x A(x) \vee \forall x B(x)$
 C. $\exists x (A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$
 D. $\neg \forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x (\neg A(x))$
51. 设 $A = \Phi$ (空集), $B = \{\Phi, \{\Phi\}\}$, 则 $B - A$ 是 (C)
- A. $\{\{\Phi\}\}$ B. $\{\Phi\}$ C. $\{\Phi, \{\Phi\}\}$ D. Φ
52. 设 $A = \{a, b, c, d\}$, A 上的等价关系 $R = \{\langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle c, d \rangle, \langle d, c \rangle\} \cup I_A$, 则对应于 R 的 A 的划分是 (D)
- A. $\{\{a\}, \{b, c\}, \{d\}\}$ B. $\{\{a, b\}, \{c\}, \{d\}\}$ C. $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}$ D. $\{\{a, b\}, \{c, d\}\}$
53. 设 N 是自然数集, $f: N \rightarrow N$, 其中 $f(x) = [x] \pmod{5}$ (即 x 除以 5 的余数), 则 f 是 (D)
- A. 入射 B. 满射
 C. 一一对应映射 D. 不是入射也不是满射
54. 设群 G 的阶是 12, H 是 G 的子群, 则 H 的阶不可能是 (D)
- A. 1 B. 2 C. 4 D. 8
55. 下列关于循环群的描述, 错误的是 (B)
- A. 循环群一定是阿贝尔群 B. 循环群的生成元素是唯一的
 C. 循环群的子群一定是循环群 D. 素数阶群一定是循环群

56. 设图 G 的邻接矩阵为 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, 则 G 的顶点数与边数分别为 (D)

- A. 4, 5 B. 5, 6 C. 4, 10 D. 5, 8

57. 图 G 和 G' 的结点和边分别存在一一对应关系是 $G \cong G'$ (同构) 的 (C)

- A. 充分条件 B. 充分必要条件
C. 必要条件 D. 既不充分也不必要条件

58. 设 G 是一个哈密尔顿图, 则 G 一定是 (D)

- A. 欧拉图 B. 树 C. 平面图 D. 连通图

59. 设 P : 天下大雨, Q : 他乘公共汽车上班. 命题“只有天下大雨, 他才乘公共汽车上班”符号化为 (B)

- A. $P \rightarrow Q$ B. $Q \rightarrow P$ C. $P \leftrightarrow Q$ D. $\neg P \rightarrow Q$

60. 谓词公式 $(\forall x)P(x,y) \wedge (\exists x)(Q(x,z) \rightarrow (\forall x)(\forall y)R(x,y,z))$ 中量词 $\exists x$ 的辖域是 (A)

- A. $(Q(x,z) \rightarrow (\forall x)(\forall y)R(x,y,z))$ B. $Q(x,z), R(x,y,z)$
C. $Q(x,z) \rightarrow (\forall y)R(x,y,z)$ D. $Q(x,z)$

填空题

1. 设集合 $A = \{1, 2, \{1\}\}$, $B = \{3, \{1\}\}$, 则 $A \cap B = \{ \{1\} \}$

2. 设集合 $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2\}$, 则从 A 到 B 共有 8 个映射.

3. 全体有理数构成的集合 Q 的基数为 $\aleph_0$ (或 $\aleph_0$)

4. 设群中元素 a 的阶为 12, 则 a^4 的阶为 3

5. 设 $A = \{a, b, c, d\}$, A 上二元运算如下:

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	a	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

那么代数系统 $\langle A, * \rangle$ 的单位元是 a

6. 完全二分图 $K_{2,3}$ 的边数为 6

7. 三个结点可构成_____个不同构的简单图。 4
8. 设 G 是连通平面图, 若 G 有 7 个面 15 条边, 则 G 有_____个顶点。 10
9. 谓词逻辑中的量词有两类: 全称量词和_____. 存在量词
10. 设 P, Q 的真值为 0, R, S 的真值为 1, 则
 $\neg(P \vee (Q \rightarrow (R \wedge \neg P))) \rightarrow (R \vee \neg S)$ 的真值为_____. 1
11. 设集合 $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, 则 $A - B =$ _____. $\{1\}$
12. 设集合 $S = \{1, 2\}$, 则 S 上共有_____个二元关系。 2^4
13. 全体自然数构成的集合 N 的基数为_____. $\aleph_0$ (或 $\aleph_0$)
14. 设群中元素 a 的阶为 12, 则 a^8 的阶为_____. 3
15. 如果同构的群认为相同, 那么 4 阶的群共有_____个。 2
16. 5 阶完全图 K_5 共有_____条边。 10
17. 设图 $G = \langle V, E \rangle$, 若 $|V| = 1$, $|E| = 0$, 则称图 G 为_____. 平凡图
18. 树的叶是指_____. 次数等于 1 的结点
19. 在命题逻辑中, 凡是能判断_____的陈述句称为命题。真假
20. 若解释 I 的论域 D 仅包含一个元素, 则 $\exists x P(x) \rightarrow \forall x P(x)$ 在 I 下真值为_____. 1
21. 设集合 $A = \{1, \{1\}\}$, $B = \{2, \{1\}\}$, 则 $A \cup B =$ _____. $\{1, 2, \{1\}\}$
22. 设集合 $S = \{0, 2, 4\}$, 则 S 上共有_____个二元关系。 2^9
23. 全体实数构成的集合 R 的基数为_____. C (或 $\aleph_1$)
24. 设群中元素 a 的阶为 6, 则 a^4 的阶为_____. 3
25. 4 阶群必是 Klein 四元群或_____群。循环
26. n 阶完全图任一结点 v 的度数 $d(v) =$ _____. $n-1$
27. 简单图 G 为二部图, 当且仅当图 G 中所有基本回路的长度均为_____. 偶数
28. 当 n 为_____时, 非平凡无向完全图 K_n 是欧拉图。奇数
29. 命题可分为命题常量与_____. 命题变量
30. 谓词公式 $\forall x (P(x) \vee Q(x))$, 其中 $P(x): x=1$, $Q(x): x=2$, 当个体域为 $\{1, 2\}$ 时,

该公式的真值为_____。1

31. 设集合 $A = \{1, \{1\}\}$ 则其幂集 $\rho(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{\{1\}\}, \{1, \{1\}\}\}$

32. 设集合 $S = \{a, b, c\}$, 则 S 上共有_____个二元关系。 2^9

33. 集合 $(0,1)$ 的基数为_____。 C (或 $\aleph_1$)

34. 设 $(G, *)$ 为阿贝尔群, $a, b \in G$, a, b 的阶分别为 4 和 5, 则 $a * b$ 的阶为_____。 20

35. 设 $(Z_5, +, \times)$ 为模 5 的环, 则元素 $[3]$ 的乘法逆元 $[3]^{-1} = [2]$

36. 如果同构的群认为相同, 那么 3 阶的群共有_____个。 1

37. 在任何图 $G = \langle V, E \rangle$ 中, 奇度结点必有_____个。 偶数

38. 设图 T 是一颗 (n, m) 树, 则 n 与 m 的关系为_____。 $m = n - 1$

39. 重言式或永真公式是指不管公式中的分量作怎样的指派, 其值永远为_____的公式。 真

40. 谓词公式 $(\forall x)(\exists y)P(x, y)$, 给定解释 I : 个体域为实数, $P(x, y): x > y$, 则该公式的真值为_____。 1

41. 设 ϕ 为空集, 则幂集 $\rho(\rho(\phi)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

42. 设集合 $A = \{a, b\}, B = \{1, 2, 3\}$, 则从 A 到 B 共有_____个映射。 9

43. 设 N 是自然数集, 集合 $N \times N$ 的基数为_____。 $\aleph$ (或 $\aleph_0$)

44. 设 $(G, *)$ 为阿贝尔群, $a, b \in G$, a, b 的阶分别为 4 和 6, 则 $a * b$ 的阶为_____。 12

45. 设 $(Z_{10}, +, \times)$ 为模 10 的环, 则元素 $[9]$ 的乘法逆元 $[9]^{-1} = [9]$

46. 设 $(G, *)$ 是一个 4 阶群, 若它含有_____元素时, 这个群是循环群。 4 阶

47. n 阶完全图共有_____条边。 $\frac{n(n-1)}{2}$

48. 设 G 是连通平面图, 有 4 个顶点, 4 个面, 则 G 有_____条边。 6

49. 在命题中, 有些命题是基本的、原始的, 它不能再被分割成为更小的命题, 这些命题称为_____。 原子命题

50. 谓词公式 $\forall x (P(x) \vee Q(x))$, 其中 $P(x): x=1$, $Q(x): x=2$, 当个体域为 $\{0, 1, 2\}$ 时, 其真值为_____。 0

51. 设集合 $A = \{1, \{1\}\}$, $B = \{2, \{1\}\}$, 则 $A - B = \underline{\quad\quad\quad}$. $\{1\}$
52. 设集合 $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2\}$, 则从 A 到 B 共有 $\underline{\quad\quad\quad}$ 个二元关系. 2^6
53. 集合 $[0, 1]$ 的基数为 $\underline{\quad\quad\quad}$. C (或 $\aleph_1$)
54. 设 $(G, *)$ 为阿贝尔群, $a, b \in G$, a, b 的阶分别为 4 和 8, 则 $a * b$ 的阶为 $\underline{\quad\quad\quad}$. 8
55. 设 $(G, *)$ 是一个群, 若 $a, b, x \in G$, $a * x = b$, 则 $x = \underline{\quad\quad\quad}$. $a^{-1} * b$
56. 设 $(G, *)$ 为群, 则其平凡子群是 G 和 $\underline{\quad\quad\quad}$. $(\{e\}, *)$
57. 任何 (n, m) 图 $G = (V, E)$, 边与顶点数的关系是 $\underline{\quad\quad\quad}$. $\sum d(v) = 2m$
58. 设 G 是连通平面图, 若 G 有 8 个顶点 12 条边, 则 G 有 $\underline{\quad\quad\quad}$ 个面. 6
59. 将量词辖域中出现的 $\underline{\quad\quad\quad}$ 和指导变元交换为另一变元符号, 公式其余的部分不变, 这种方法称为换名规则. 约束变元
60. 论域 $D = \{1, 2\}$, 指定谓词 P

$P(1, 1)$	$P(1, 2)$	$P(2, 1)$	$P(2, 2)$
1	1	0	0

则公式 $\forall x \exists y P(y, x)$ 真值为 $\underline{\quad\quad\quad}$. 1

计算题

1. 设 $A = \{\emptyset, 1, 2, \{1, 2\}\}$, $B = \{\{\emptyset\}, 1, 2\}$, $C = \{1, 2, 3\}$, 求 $2^{A \cap B} - (A \cap 2^C)$.

解: $A \cap B = \{1, 2\}$.

$$2^{A \cap B} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}.$$

$$2^C = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, C\}.$$

$$\therefore 2^{A \cap B} - (A \cap 2^C) = \{\{1\}, \{2\}\}.$$

2. 集合 $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 找出 S 上的等价关系, 此关系能产生划分 $\{\{1, 2\}, \{3\}, \{4, 5\}\}$, 并画出关系图.

$$\text{解: } R_1 = \{1, 2\} \times \{1, 2\} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$$

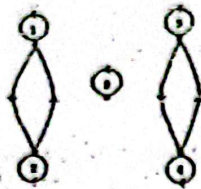
$$R_2 = \{3\} \times \{3\} = \{(3, 3)\}$$

$$R_3 = \{4, 5\} \times \{4, 5\} = \{(4, 4), (4, 5), (5, 4), (5, 5)\}$$

$$R = R_1 \cup R_2 \cup R_3$$

$$= \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 4), (5, 5)\}$$

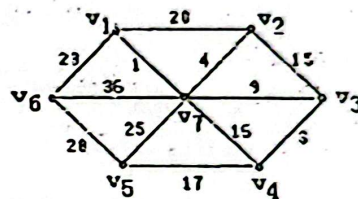
关系图为:



3. 设 $\langle \mathbb{Z}_6, +_6 \rangle$ 是一个群, 这里 $+_6$ 是模 6 加法, $\mathbb{Z}_6 = \{[0], [1], [2], [3], [4], [5]\}$, 试求出 $\langle \mathbb{Z}_6, +_6 \rangle$ 的所有子群及其相应左陪集.

解: 子群有 $\langle \{[0]\}, +_6 \rangle$; $\langle \{[0], [3]\}, +_6 \rangle$; $\langle \{[0], [2], [4]\}, +_6 \rangle$; $\langle \mathbb{Z}_6, +_6 \rangle$
 $\{[0]\}$ 的左陪集: $\{[0]\}, \{[1]\}, \{[2]\}, \{[3]\}, \{[4]\}, \{[5]\}$
 $\{[0], [3]\}$ 的左陪集: $\{[0], [3]\}, \{[1], [4]\}, \{[2], [5]\}$
 $\{[0], [2], [4]\}$ 的左陪集: $\{[0], [2], [4]\}, \{[1], [3], [5]\}$
 $\mathbb{Z}_6$ 的左陪集: $\mathbb{Z}_6$.

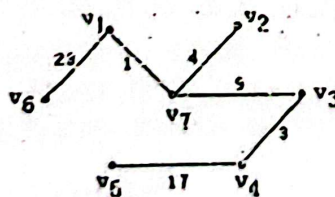
4. 如下图所示的赋权图表示某七个城市 $v_1, v_2, \dots, v_7$ 及预先算出它们之间的一些直接通信线路造价, 试给出一个设计方案, 使得各城市之间能够通信而且总造价最小.



解: 用库斯克 (Kruskal) 算法求产生的最优树.
 算法为:

$w(v_1, v_7) = 1$ 选 $e_1 = v_1 v_7$
 $w(v_1, v_2) = 4$ 选 $e_2 = v_1 v_2$
 $w(v_1, v_3) = 9$ 选 $e_3 = v_1 v_3$
 $w(v_3, v_4) = 3$ 选 $e = v_3 v_4$
 $w(v_4, v_5) = 17$ 选 $e = v_4 v_5$
 $w(v_1, v_6) = 23$ 选 $e = v_1 v_6$

结果如图:



树权 $C(T) = 23 + 1 + 4 + 9 + 3 + 17 = 57$ 即为总造价.

5. 设图 G 有 16 条边, 3 个 4 度结点, 4 个 3 度结点, 其余结点的度数都小于 3, 问 G 至少

有几个结点?

解: 设 G 有 x 个结点, 则

$$4 \times 3 + 3 \times 4 + 2 \times (x - 3 - 4) \geq 2 \times 16$$

所以 $x \geq 11$, 即 G 至少有 11 个结点.

6. 试求命题公式 $P \vee (Q \wedge R)$ 的特异析取范式和特异合取范式.

解: $P \vee (Q \wedge R)$

$$= (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

$$= (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \quad (\text{特异合取范式})$$

$$= (P \wedge 1) \vee (1 \wedge Q \wedge R)$$

$$= (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R)$$

$$\vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \quad (\text{特异析取范式})$$

7. 设 $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{1, 2\}$, 试计算: (1) $A \times B$; (2) 2^A ; (3) $A \times 2^B$.

解: (1) $A \times B = \{(0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$

$$(2) 2^A = \{\Phi, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$$

$$(3) 2^B = \{\Phi, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}, \text{ 所以}$$

$$A \times 2^B = \{(0, \Phi), (0, \{1\}), (0, \{2\}), (0, \{1, 2\}),$$

$$(1, \Phi), (1, \{1\}), (1, \{2\}), (1, \{1, 2\}),$$

$$(2, \Phi), (2, \{1\}), (2, \{2\}), (2, \{1, 2\})\}$$

8. 集合 $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 找出 S 上的等价关系, 此关系能产生划分 $\{\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}\}$.

解: $R_1 = \{1\} \times \{1\} = \{(1, 1)\}$

$$R_2 = \{2, 3\} \times \{2, 3\} = \{(2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$$

$$R_3 = \{4, 5\} \times \{4, 5\} = \{(4, 4), (4, 5), (5, 4), (5, 5)\}$$

所以, 所求的等价关系为:

$$R = R_1 \cup R_2 \cup R_3$$

$$= \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 4), (5, 5)\}$$

9. 设 $Z_{12} = \{[0], [1], [2], \dots, [11]\}$, $+_{12}$ 为模 12 加法运算, 则 $(Z_{12}, +_{12})$ 是一个群, 它的一个

三阶子群为 $(H, +_{11})$, 其中 $H = \{[0], [4], [8]\}$, 试计算 H 在 Z_{11} 中的所有左陪集.

解: H 在 Z_{11} 中的所有左陪集为:

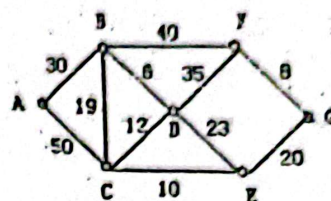
$$[0]H = [4]H = [8]H = H = \{[0], [4], [8]\}$$

$$[1]H = [5]H = [9]H = \{[1], [5], [9]\}$$

$$[2]H = [6]H = [10]H = \{[2], [6], [10]\}$$

$$[3]H = [7]H = [11]H = \{[3], [7], [11]\}$$

10. 试给出下图所示带权图中最优投递路线, 并求出投递路线长度 (邮局在 D 点).



题图

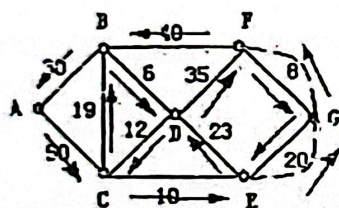
解: 图中奇数点为 E、F, $d(E)=3, d(F)=3, d(E, F)=28$ $p=EGF$

复制道路 EG、GF, 得图 G' (如图), 则 G' 是欧拉图.

由 D 开始找一条欧拉回路: DEFGEDACBDCFD.

道路长度为:

$$35+8+20+20+8+40+30+50+19+6+12+10+23=281$$



答图

11. 设树 T 有 2 个 2 度结点, 1 个 3 度结点, 3 个 4 度结点, 其余的都是树叶, 求 T 的树叶片数.

解: 设树叶片数为 x , 则

$$1 \times x + 2 \times 2 + 3 \times 1 + 4 \times 3 = 2(x + 2 + 1 + 3 - 1)$$

解得: $x=9$, 即树叶片数为 9.

12. 求公式 $(P \rightarrow Q) \wedge R$ 的特异析取范式和特异合取范式.

$$\text{解: } (P \rightarrow Q) \wedge R \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge R$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge (Q \vee \neg Q) \wedge R) \vee ((\neg P \vee P) \wedge Q \wedge R)$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \text{ (特异析取范式)}$$

$$(P \rightarrow Q) \wedge R \Leftrightarrow (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R)$$

$$\wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \text{ (特异合取范式)}$$

13. 求集合 $A=\{1,2\}$ 上的所有等价关系。

解: A 上的每一个划分对应 A 上的一个等价关系, 所以只要找出 A 上的所有的划分即可, A 上的划分有: $\{1\} \cup \{2\}$ 和 $\{1, 2\}$ 。

所以 A 上的所有等价关系有:

$$R_1 = \{1\} \times \{1\} \cup \{2\} \times \{2\} = \{(1,1), (2,2)\};$$

$$R_2 = \{1,2\} \times \{1,2\} = \{(1,1), (2,2), (1,2), (2,1)\};$$

14. 设 $A=\{1, 2\}$, A 上所有函数的集合记为 A^A , $\circ$ 是函数的复合运算, 试给出 A^A 上的复合运算 $\circ$ 的运算表, 并指出 A^A 中是否有幺元, 哪些元素有逆元?

解: 因为 $|A|=2$, 所以 A 上共有 $2^2=4$ 个不同函数, 令 $A^A = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$, 其中:

$$f_1(1)=1, f_1(2)=2; \quad f_2(1)=1, f_2(2)=1; \quad f_3(1)=2, f_3(2)=2; \quad f_4(1)=2, f_4(2)=1$$

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_2	f_2	f_2
f_3	f_3	f_3	f_3	f_3
f_4	f_4	f_4	f_4	f_1

f_1 为 A^A 中的幺元, f_1 和 f_4 有逆元。

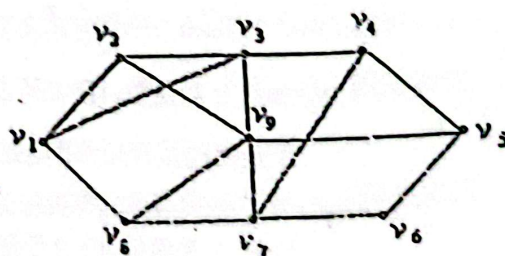
15. 某年级共有 9 门选修课程, 期末考试前必须提

前将这 9 门课程考完, 每人每天只在下午考一

门课, 若以结点表示课程, 有一人同时选两门

课程, 则这两点间有边相连 (其图如右), 问至

少需几天可考完全部九门课程?



题

解: $\chi(G)$ 即为最少考试天数。

用 Welch-Powell 方法对 G 着色: $v_1, v_3, v_5, v_7, v_9, v_2, v_4, v_6, v_8$

第一种颜色的点 v_1, v_3, v_5, v_7, v_9 , 剩余点 v_2, v_4, v_6, v_8

第二种颜色的点 v_2, v_4, v_6, v_8 , 剩余点 v_1, v_3, v_5, v_7, v_9

第三种颜色的点 v_1, v_3, v_5, v_7, v_9

所以 $\chi(G) \leq 3$

任 v_2, v_3, v_9 构成一圆, 所以 $\chi(G) \geq 3$

故 $\chi(G) = 3$

所以三天下午即可考完全部九门课程。

16. 设图 G 有 20 条边, 5 个 4 度结点, 4 个 3 度结点, 其余结点的度数都小于 3, 问 G 至少有几个结点?

解: 设 G 有 x 个结点, 则

$$4 \times 5 + 3 \times 4 + 2 \times (x - 5 - 4) \geq 2 \times 20$$

所以 $x \geq 13$, 即 G 至少有 13 个结点。

17. 试求命题公式 $P \vee (\neg P \rightarrow (Q \rightarrow (R \wedge P)))$ 的特异析取范式和特异合取范式。

$$\text{解: } P \vee (\neg P \rightarrow (Q \rightarrow (R \wedge P))) = P \vee (P \vee (\neg Q \vee (R \wedge P)))$$

$$= (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee P)$$

$$= (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee 1)$$

$$= (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee (R \wedge \neg R))$$

$$= (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R) \quad (\text{特异合取范式})$$

$$= P \vee \neg Q \vee (R \wedge \neg R)$$

$$= P \vee \neg Q$$

$$= (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R)$$

$$\vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \quad (\text{特异析取范式})$$

18. 如果 2 是偶数, 则 2 不能整除 7; 或者 5 不是质数, 或者 2 整除 7; 5 是质数。问: 2

不是偶数是否为其有效结论? 为什么?

解: 2 不是偶数是其有效结论。

设 P : 2 是偶数, Q : 2 整除 7, R : 5 是质数

则命题化为论证: $P \rightarrow \neg Q, \neg R \vee Q, R \Rightarrow \neg P$

$$(1) R \quad P$$

$$(2) \neg R \vee Q \quad P$$

$$(3) Q \quad T(1)(2), I$$

$$(4) P \rightarrow \neg Q \quad P$$

$$(5) \neg P \quad T(3)(4), I$$

所以, 2 不是偶数是其有效结论。

19. 设 $R = \{(0,1), (0,2)\}$ 是集合 $A = \{0,1,2\}$ 上的二元关系, 求解 R 的自反闭包、对称闭包和传递闭包。

解: 自反闭包 $r(R) = \{(0,0), (1,1), (2,2), (0,1), (0,2)\}$

对称闭包 $s(R) = \{(1,0), (2,0), (0,1), (0,2)\}$

传递闭包 $t(R) = \{(0,1), (0,2)\}$

20. 有理数集 Q 上的二元运算 $*$ 定义如下: 对任意的 $\langle a, b \rangle, \langle x, y \rangle \in Q \times Q$, 有

$$\langle a, b \rangle * \langle x, y \rangle = \langle ax, ay + b \rangle$$

问运算 $*$ 有没有单位元和零元, 如果有, 求出 $*$ 的单位元和零元。

解: 任意 $\langle a, b \rangle \in Q \times Q$, 设 $\langle a, b \rangle * \langle x, y \rangle = \langle a, b \rangle$, 即

$$\langle ax, ay + b \rangle = \langle a, b \rangle, \text{得}$$

$$ax = a, \text{且 } ay + b = b,$$

$$\text{解得 } x = 1, y = 0.$$

因为对任意 $\langle a, b \rangle \in Q \times Q$, 有 $\langle 1, 0 \rangle \in Q \times Q$, 使得

$$\langle a, b \rangle * \langle 1, 0 \rangle = \langle a, b \rangle \text{ 和}$$

$$\langle 1, 0 \rangle * \langle a, b \rangle = \langle a, b \rangle$$

所以, $\langle 1, 0 \rangle$ 是单位元。

任意 $\langle a, b \rangle \in Q \times Q$, 设 $\langle a, b \rangle * \langle x, y \rangle = \langle x, y \rangle$, 即

$$\langle ax, ay + b \rangle = \langle x, y \rangle, \text{得}$$

$$ax = x, \text{且 } ay + b = y,$$

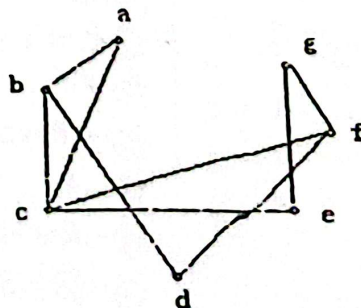
此方程并非对所有得有理数 a, b 都有解, 因此, 无零元。

21. 设有 a, b, c, d, e, f, g 七个人, 他们分别会讲的语言如下: a : 英, b : 汉、英, c : 英、西班牙、俄, d : 日、汉, e : 德、西班牙, f : 法、日、俄, g : 法、德, 能否将这七个人的座位安排在圆桌旁, 使得每个人均能与他旁边的人交谈?

解: 用 a, b, c, d, e, f, g 7 个结点表示 7 个人, 若两人能交谈可用一条无向边连结, 所得无向图如图所示。

此图中的 Hamilton 回路即是圆桌安排座位的顺序。

此图中可以找到一条 Hamilton 回路: $abdfgeca$, 所以按这个次序将这七个人的座位安排在圆桌旁, 就可以使得每个人均能与他旁边的人交谈。



22. 设树 T 有 4 个 2 度结点, 2 个 3 度结点, 3 个 4 度结点, 其余的都是树叶, 求 T 的树叶片数.

解: 设树叶片数为 x , 则

$$1 \times x + 2 \times 4 + 3 \times 2 + 4 \times 3 = 2(x + 4 + 2 + 3 - 1)$$

解得: $x = 10$, 即树叶片数为 10.

23. 设 P, Q, R 为原子命题, 求命题公式 $P \rightarrow Q \wedge \neg R$ 的真值表, 并给出其等价的特异析取范式.

解: $P \rightarrow Q \wedge \neg R$ 的真值表为:

P	Q	R	$\neg R$	$Q \wedge \neg R$	$P \rightarrow Q \wedge \neg R$
0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0

故其特异析取范式为:

$$(P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$$

24. 如果厂方拒绝增加工资, 那么罢工就不会停止, 除非罢工超过一年并且工厂撤换了厂长.

问: 若厂方拒绝增加工资, 而罢工刚开始, 罢工是否能够停止? 试用推理规则论证你的结论.

解: 罢工不会停止.

设 P : 厂方拒绝增加工资; Q : 罢工停止; R : 罢工超过一年; S : 撤换厂长

前提: $P \rightarrow (\neg(R \wedge S) \rightarrow \neg Q)$, P , $\neg R$ 结论: $\neg Q$

① $P \rightarrow (\neg(R \wedge S) \rightarrow \neg Q)$	P
② P	P
③ $\neg(R \wedge S) \rightarrow \neg Q$	T①②I
④ $\neg R$	P
⑤ $\neg R \vee \neg S$	T④I
⑥ $\neg(R \wedge S)$	T⑤E
⑦ $\neg Q$	T③⑥I

所以, 罢工不会停止是有效结论.

25. 设 $R = \{(a, b), (b, c), (c, d)\}$ 是集合 $A = \{a, b, c, d\}$ 上的二元关系, 求 R 的自反闭包、对称闭包和传递闭包.

解: 自反闭包 $r(R) = R \cup E = \{(a, b), (b, c), (c, d), (a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$

对称闭包 $s(R) = R \cup \bar{R} = \{(a, b), (b, c), (c, d), (b, a), (c, b), (d, c)\}$

传递闭包 $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4$

$= \{(a, b), (b, c), (c, d)\} \cup \{(a, c), (b, d)\} \cup \{(a, d)\} \cup \emptyset$

$= \{(a, b), (b, c), (c, d), (a, c), (b, d), (a, d)\}$

26. 设集合 $A = \{1, 2\}$, $B = \{0, 1\}$, 求: (1) 所有 A 到 B 的关系; (2) 所有 A 到 B 的映射; (3) 所有 A 到 B 的双射.

解: $A \times B = \{<1, 0>, <1, 1>, <2, 0>, <2, 1>\}$

(1) 所有 A 到 B 的关系为 $2^{A \times B}$ 的每一个元素, 分别为:

$\emptyset, \{<1, 0>\}, \{<1, 1>\}, \{<2, 0>\}, \{<2, 1>\},$

$\{<1, 0>, <1, 1>\}, \{<1, 0>, <2, 0>\}, \{<1, 0>, <2, 1>\}, \{<1, 1>, <2, 0>\}, \{<1, 1>, <2, 1>\}, \{<2, 0>, <2, 1>\},$

$\{<1, 0>, <1, 1>, <2, 0>\}, \{<1, 0>, <1, 1>, <2, 1>\}, \{<1, 0>, <2, 0>, <2, 1>\}, \{<1, 1>, <2, 0>, <2, 1>\},$

$\{<1, 0>, <1, 1>, <2, 0>, <2, 1>\};$

(2) 所有 A 到 B 的映射为 $\{<1, 0>, <2, 0>\}, \{<1, 0>, <2, 1>\},$

$\{<1, 1>, <2, 0>\}, \{<1, 1>, <2, 1>\};$

(3) 所有 A 到 B 的双射为 $\{<1, 0>, <2, 1>\}, \{<1, 1>, <2, 0>\}.$

27. 设 $A = \{a, b, c\}$ 上的二元运算 $*$ 如下表所示. (1) 判断 $*$ 是否满足交换律, 结合律和幂等律;

(2) 求关于 $*$ 的单位元, 零元及每个可逆元的逆元.

题 23 表

$*$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	c
c	c	b	c

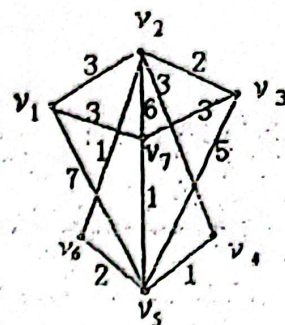
解: (1) $*$ 不满足交换律, 结合律但满足幂等律.

(2) a 是关于 $*$ 的单位元,

无零元

a 为可逆元, 其逆元为 a , b 和 c 都不可逆。

28. 带权图 G 如下图所示, 求 G 中的最优投递路线。(邮局在 v_1 点)



题图

解: 图中有 4 个奇数结点, $d(v_1)=3$, $d(v_2)=5$, $d(v_3)=3$, $d(v_5)=5$

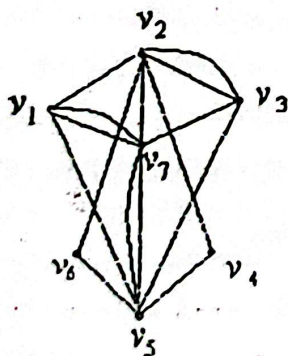
(1) 求 v_1, v_2, v_3, v_5 任两结点的最短路

$d(v_1v_2)=3$, $d(v_2v_3)=5$, $d(v_1v_3)=4$, $d(v_2v_5)=3$, $d(v_3v_5)=4$

$p_1 = v_1v_2$, $p_2 = v_1v_2v_3$, $p_3 = v_1v_7v_5$, $p_4 = v_2v_3$, $p_5 = v_2v_6v_5$, $p_6 = v_3v_7v_5$
再找两条道路使得它们没有相同的起点和终点, 且长度总和最短:

$p_3 = v_1v_7v_5$, $p_4 = v_2v_3$,

(2) 在原图中复制出 p_3, p_4 , 设为图 G' (如左图), 则图 G' 中每个结点度数均为偶数, 图 G' 存在欧拉回路 $C = v_1v_7v_3v_2v_4v_5v_6v_7v_5v_3v_2v_1v_5v_1$, 欧拉回路 C 权长为 43.



答图

29. 设图 G 有 18 条边, 2 个 4 度结点, 4 个 3 度结点, 其余结点的度数都小于 3, 问 G 至少有几个结点?

解: 设 G 有 x 个结点, 则

$$4 \times 2 + 3 \times 4 + 2 \times (x - 2 - 4) \geq 2 \times 16$$

所以 $x \geq 14$, 即 G 至少有 14 个结点.

30. 设 P, Q, R 为原子命题, 求命题公式 $P \rightarrow \neg Q \vee R$ 的真值表, 并给出其等价的特异合

取范式.

解: $P \rightarrow \neg Q \vee R$ 的真值表为:

P	Q	R	$\neg Q$	$\neg Q \vee R$	$P \rightarrow \neg Q \vee R$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	1	1

所以, 其特异合取范式为: $\neg P \vee \neg Q \vee R$

31. 设集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $R = \{(1, 2), (2, 3), (4, 4)\}$ 是 A 上的二元关系, 求 R 的自反闭包、

对称闭包和传递闭包.

解: 自反闭包 $r(R) = R \cup E = \{(1, 2), (2, 3), (4, 4), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

对称闭包 $s(R) = R \cup \bar{R} = \{(1, 2), (2, 3), (4, 4), (2, 1), (3, 2)\}$

传递闭包 $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4$

$= \{(1, 2), (2, 3), (4, 4)\} \cup \{(1, 3), (4, 4)\} \cup \{(4, 4)\} \cup \{(4, 4)\}$

$= \{(1, 2), (2, 3), (1, 3), (4, 4)\}$

32. 设 $(G, *)$ 是 4 阶群, 其运算表如下, 试求出每个元素的阶数, 并判断其是否为循环群.

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

解: a 是单位元, 其阶数为 1;

$b^2 = c, b^3 = b^2 * b = c * b = d, b^4 = b^3 * b = d * b = a$, 故 b 的阶数为 4;

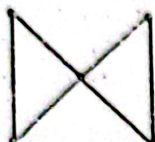
$c^2 = a$, 故 c 的阶数为 2;

$d^2 = c, d^3 = d^2 * d = c * d = b, d^4 = d^3 * d = b * d = a$, 故 d 的阶数为 4.

由上可知, 该群是循环群, b, d 都是其生成元.

33. 构造一个结点 v 与边数 e 奇偶性相反的欧拉图.

答案不唯一, 只要符合题意即可. 如:



结点数 5, 边数 6, 每个结点的度数均为偶数, 所以它是欧拉图.



结点数 6, 边数 7, 每个结点的度数均为偶数, 所以它是欧拉图.

34. 设树 T 有 5 个 2 度结点, 4 个 3 度结点, 3 个 4 度结点, 其余的都是树叶, 求 T 的树叶片数.

解: 设树叶片数为 x , 则

$$1 \times x + 2 \times 5 + 3 \times 4 + 4 \times 3 = 2(x + 5 + 4 + 3 - 1)$$

解得: $x = 12$, 即树叶片数为 12.

35. 设命题 A_1, A_2 的真值为 1, A_3, A_4 真值为 0, 求命题

$(A_1 \vee (A_2 \rightarrow (A_3 \wedge \neg A_4))) \leftrightarrow (A_2 \vee \neg A_4)$ 的真值.

解: 当命题 A_1, A_2 的真值为 1, A_3, A_4 真值为 0 时, 命题

$(A_1 \vee (A_2 \rightarrow (A_3 \wedge \neg A_4))) \leftrightarrow (A_2 \vee \neg A_4)$ 的真值为:

$$\begin{aligned} (1 \vee (1 \rightarrow (0 \wedge 0))) &\leftrightarrow (1 \vee 1) = (1 \vee (1 \rightarrow 0)) \leftrightarrow 1 \\ &= (1 \vee 0) \leftrightarrow 1 = 1 \leftrightarrow 1 = 1 \end{aligned}$$

36. 将谓词公式 $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x, y)) \rightarrow ((\exists y)P(y) \wedge (\exists z)Q(y, z))$ 化为前束析取范式与前束合取范式.

解: $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x, y)) \rightarrow ((\exists y)P(y) \wedge (\exists z)Q(y, z))$

$$\Leftrightarrow \neg (\forall x)(\neg P(x) \vee Q(x, y)) \vee ((\exists y)P(y) \wedge (\exists z)Q(y, z))$$

$$\Leftrightarrow (\exists x)(P(x) \wedge \neg Q(x, y)) \vee ((\exists y)P(y) \wedge (\exists z)Q(y, z))$$

$$\Leftrightarrow (\exists x)(P(x) \wedge \neg Q(x, y)) \vee ((\exists u)P(u) \wedge (\exists z)Q(y, z))$$

$$\Leftrightarrow (\exists x)(\exists u)(\exists z)((P(x) \wedge Q(x, y)) \vee (P(u) \wedge Q(y, z)))$$

前束析取范式

$$\Leftrightarrow (\exists x)(\exists u)(\exists z)((P(x) \vee P(u)) \wedge (P(x) \vee Q(y, z)) \wedge (\neg Q(x, y) \vee P(u)) \wedge (\neg Q(x, y) \vee Q(y, z)))$$

前束合取范式

证明题

1. 证明循环群的同态象必是循环群。

证：设循环群 $[A, \cdot]$ 的生成元为 a ，同态映射为 f ，同态象为 $\langle f(A), * \rangle$ ，于是 $\forall a^n, a^m \in A$

$$\text{都有 } f(a^n \cdot a^m) = f(a^n) * f(a^m)$$

$$\text{对 } n=1 \text{ 有 } f(a) = f(a)$$

$$n=2, \text{ 有 } f(a^2) = f(a \cdot a) = f(a) * f(a) = (f(a))^2$$

$$\text{若 } n=k-1 \text{ 时 有 } f(a^{k-1}) = (f(a))^{k-1}$$

$$\text{对 } n=k \text{ 时, } f(a^k) = f(a^{k-1} \cdot a) = f(a^{k-1}) * f(a) = (f(a))^{k-1} * f(a) = (f(a))^k$$

即 $f(A)$ 中每一个元素均可表示为 $(f(a))^n$ ，所以 $\langle f(A), * \rangle$ 是以 $f(a)$ 生成元的循环群。

2. 用推理规则证明：

$$(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow (\forall x)A(x) \rightarrow (\forall x)B(x).$$

证明：

$$(1) (\forall x)A(x) \quad P(\text{附加前提})$$

$$(2) A(a) \quad US(1)$$

$$(3) (\forall x)(A(x) \rightarrow B(x)) \quad P$$

$$(4) A(a) \rightarrow B(a) \quad US(3)$$

$$(5) B(a) \quad T(2)(4), I$$

$$(6) (\forall x) B(x) \quad \text{UG}(5)$$

$$(7) (\forall x) A(x) \rightarrow (\forall x) B(x) \quad \text{CP}$$

3. 设 $(S, \circ)$ 是一个单元半群, 且对于 S 中任意元素 a , 都有 $a \circ a = e$, 其中 e 是单位元, 证

明 $(S, \circ)$ 是一个阿贝尔群.

证明: 对于 S 中任意元素 x , 由条件知道 $x \circ x = e$, 因此 x 存在逆元, 此逆元是其自身 x ,

因此 $(S, \circ)$ 是一个群.

对于 S 中任意元素 x 和 y , 设 $x \circ y = z$, 有 $z \in S$. 因 $(S, \circ)$ 是群, 所以 $y = x^{-1} \circ z$,

由于每一元素以其自身为逆元,

于是

$$\begin{aligned} y \circ x &= x^{-1} \circ z \circ x = x \circ z^{-1} \circ x = x \circ (z^{-1} \circ x)^{-1} \\ &= x \circ (x^{-1} \circ z) = (x \circ x^{-1}) \circ z = z \end{aligned}$$

即 $y \circ x = z = x \circ y$ $\circ$ 是可交换的.

因此 $(S, \circ)$ 是阿贝尔群.

4. 用推理规则证明:

$$(\forall x)(\neg A(x) \rightarrow B(x)); (\forall x)\neg B(x) \Rightarrow (\exists x) A(x).$$

证明:

$$(1) (\forall x)(\neg A(x) \rightarrow B(x)) \quad \text{P}$$

$$(2) \neg A(a) \rightarrow B(a) \quad \text{US}(1)$$

$$(3) (\forall x)\neg B(x) \quad \text{P}$$

$$(4) \neg B(a) \quad \text{US}(3)$$

$$(5) A(a) \quad \text{T}(2)(4), 1$$

$$(6) (\exists x) A(x) \quad \text{EG}(5)$$

5. 设 2^A 和 2^B 为集合 A, B 的幂集, 且 $2^A = 2^B$, 试证明: $A = B$.

证明: 若 $A = \phi$, 则 $2^B = 2^A = \{\phi\}$, 所以 $B = \phi$, $A = B$;

若 $A \neq \emptyset$, 则对任意的 $a \in A$, 有 $\{a\} \subseteq A$, 所以 $\{a\} \in 2^A$.

又因为 $2^A = 2^B$, 所以 $\{a\} \in 2^B$, 所以 $a \in B$,

因此 $A \subseteq B$.

同理可得, $B \subseteq A$, 从而 $A = B$.

6. f 和 g 都是群 $\langle G_1, \star \rangle$ 到 $\langle G_2, \star \rangle$ 的同态映射, 证明 $\langle C, \star \rangle$ 是 $\langle G_1, \star \rangle$ 的一个子群, 其

中 $C = \{x \mid x \in G_1 \text{ 且 } f(x) = g(x)\}$.

证: $\forall a, b \in C$, 有 $f(a) = g(a), f(b) = g(b)$,

$$\text{又 } f(b^{-1}) = f^{-1}(b), \quad g(b^{-1}) = g^{-1}(b)$$

$$\therefore f(b^{-1}) = f^{-1}(b) = g^{-1}(b) = g(b^{-1})$$

$$\therefore f(a \star b^{-1}) = f(a) \star f^{-1}(b) = g(a) \star g(b^{-1}) = g(a \star b^{-1})$$

$$\therefore a \star b^{-1} \in C$$

$\therefore \langle C, \star \rangle$ 是 $\langle G_1, \star \rangle$ 的子群.

7. 设 A, B, C 为任意三个集合, 证明: $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$

证: 任意 $\langle x, y \rangle \in (A \cap B) \times (C \cap D)$

$$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \wedge y \in (C \cap D)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \wedge y \in C \wedge y \in D$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in C) \wedge (x \in B \wedge y \in D)$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in (A \times C) \wedge \langle x, y \rangle \in (B \times D)$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in (A \times C) \cap (B \times D)$$

所以 $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.

8. 设 $\langle A, +, \cdot \rangle$ 是一个含幺环, 若 $|A| \geq 3$, 且任意 $a \in A$ 都有 $a \cdot a = a$, 试证明: $\langle A, +, \cdot \rangle$

不可能是整环.

证: 反证法: 反设 $\langle A, +, \cdot \rangle$ 是整环,

因为对任意 $a \in A$ 都有 $a \cdot a = a$, 且 $|A| \geq 3$, 所以 $\exists a \in A, a \neq 0, a \neq 1$ 且 $a \cdot a = a$.

即有 $a \neq 0, a - 1 \neq 0$ 且 $a \cdot (a - 1) = a \cdot a - a = a - a = 0$,

这与整环中无零因子矛盾.

所以 $\langle A, +, \cdot \rangle$ 不可能是整环.

9. 符号化下面的命题并用推理规则证明其结论:

甲、乙、丙、丁四人参加拳击比赛, 如果甲获胜, 则乙失败; 如果丙获胜, 则乙也获胜;

如果甲不获胜, 则丁不失败。所以如果丙获胜, 则丁不失败。

设 A: 甲获胜, B: 乙获胜, C: 丙获胜, D: 丁获胜

则命题化为论证:

$$A \rightarrow \neg B, C \rightarrow B, \neg A \rightarrow D \Rightarrow C \rightarrow D$$

证明: (1) $A \rightarrow \neg B$

P

(2) $B \rightarrow \neg A$

T(1), E

(3) $\neg A \rightarrow D$

P

(4) $B \rightarrow D$

T(2)(3), I

(5) $C \rightarrow B$

P

(6) $C \rightarrow D$

T(4)(5), I

10. 已知 $\langle A, * \rangle$ 是群, 集合 A 中元素的个数为偶数, 证明: 在 A 中至少存在 $a \neq e$, 使得

$a * a = e$, 其中 e 为群中的单位元。

证: 对于任意的 $x \in A$, 均有它的逆元 $x^{-1} \in A$, 使得

$$x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$$

由于互为逆元的两个不相等的元素是成对出现的, 而且群中有唯一的幺元 e, 因此, 至少有一个元素是以自身为逆元的。

即必存在 $a \in A, a \neq e$, 使得 $a * a = e$

11. 设 R 是 A 上一个二元关系,

$$S = \{ \langle a, b \rangle \mid (a, b \in A) \wedge (\text{对于某一个 } c \in A, \text{有 } \langle a, c \rangle \in R \text{ 且 } \langle c, b \rangle \in R) \}$$

试证明若 R 是 A 上一个等价关系, 则 S 也是 A 上的一个等价关系。

证: (1) S 自反的

$$\forall a \in A, \text{由 } R \text{ 自反, } \therefore (\langle a, a \rangle \in R) \wedge (\langle a, a \rangle \in R), \therefore \langle a, a \rangle \in S$$

(2) S 对称的

$$\forall a, b \in A$$

$$\langle a, b \rangle \in S \Rightarrow (\langle a, c \rangle \in R) \wedge (\langle c, b \rangle \in R) \quad \dots S \text{ 定义}$$

$$\Rightarrow (\langle a, c \rangle \in R) \wedge (\langle c, b \rangle \in R) \quad \dots R \text{ 对称}$$

$$\Rightarrow \langle b, a \rangle \in S \quad \dots R \text{ 传递}$$

(3) S 传递的

$$\forall a, b, c \in A$$

$$\langle a, b \rangle \in S \wedge \langle b, c \rangle \in S$$

$$\Rightarrow (\langle a, d \rangle \in R) \wedge (\langle d, b \rangle \in R) \wedge (\langle b, e \rangle \in R) \wedge (\langle e, c \rangle \in R)$$

$$\Rightarrow (\langle a, b \rangle \in R) \wedge (\langle b, c \rangle \in R) \quad \dots R \text{ 传递}$$

$$\Rightarrow \langle a, c \rangle \in S \quad \dots S \text{ 定义}$$

由 (1)、(2)、(3) 得: S 是等价关系。

12. 证明如果 f 是由 $\langle A, \star \rangle$ 到 $\langle D, * \rangle$ 的同态映射, g 是由 $\langle B, * \rangle$ 到 $\langle C, \Delta \rangle$ 的同态映射, 则 $g \circ f$ 是由 $\langle A, \star \rangle$ 到 $\langle C, \Delta \rangle$ 的同态映射。

证:

$$\forall a, b \in A, g \circ f(a \star b) = g(f(a \star b)) = g(f(a) * f(b))$$

$$= g(f(a)) \Delta g(f(b)) = g \circ f(a) \Delta g \circ f(b)$$

所以 $g \circ f$ 是由 $\langle A, \star \rangle$ 到 $\langle C, \Delta \rangle$ 的同态映射。

离散数学阶段性测试 (附答案)

2019年12月6日

学号: _____

姓名: _____

得分: _____

一、填空题

1、(1) 设 P : 我有时间; Q : 我将去市里, 将“我只有我有时间, 我才去市里”命题符号化 _____.

(2) 设 r : a 能被 4 整除; s : a 能被 2 整除, 将“只有 a 能被 4 整除, a 才能被 2 整除”命题符号化 _____; 将“除非 a 能被 2 整除, 否则 a 不能被 4 整除”命题符号化 _____.

2、公式 $\forall x(P(x,y) \rightarrow Q(x,y)) \wedge \exists z R(y,z) \rightarrow S(x)$ 中自由变元为 _____, 约束变元为 _____.

3、设 $F = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 2, 2 \rangle \}$, $G = \{ \langle 4, 2 \rangle, \langle 2, 5 \rangle, \langle 3, 1 \rangle \}$, 则 $F \circ G =$ _____.

二、选择题

1、下列四个命题中, 哪一个为真? ()

- A、 $\emptyset \in \emptyset$ B、 $\emptyset \in \{a\}$
C、 $\emptyset \in \{\{\emptyset\}\}$ D、 $\emptyset \subseteq \emptyset$

2、设 $A = \{a, b, c, d\}$, $R = \{ \langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle d, d \rangle \}$, 则 R 的性质是 ()

- A、自反、对称、传递的 B、对称, 反对称, 传递的
C、自反、对称、反对称的 D、只有对称性

3、设 $A = \{a, b, c\}$, 则下列是集合 A 的划分的是 ()

- A、 $\{\{b, c\}, \{c\}\}$ B、 $\{\{a, b\}, \{a, c\}\}$
C、 $\{\{a, b\}, c\}$ D、 $\{\{a\}, \{b, c\}\}$

三、解答题

1、构造命题公式 $(p \rightarrow (q \wedge r)) \rightarrow \neg p$ 的真值表

2、求 $(\neg p \rightarrow q) \wedge (r \vee p)$ 的主析取范式和主合取范式。

3、化简集合式子: $((A \cup B \cup C) \cap (A \cup B)) - ((A \cup (B - C)) \cap A)$

4、证明: $p \rightarrow (q \rightarrow r) \wedge (\neg s \vee p) \wedge q \Rightarrow s \rightarrow r$

5、设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, A 上偏序关系

$R = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 4, 1 \rangle, \langle 4, 2 \rangle, \langle 4, 3 \rangle, \langle 3, 5 \rangle, \langle 4, 5 \rangle \} \cup I_A$

(1) 作出偏序关系 R 的哈斯图

(2) 令 $B = \{1, 2, 3, 5\}$, 求 B 得最大、最小元, 极大、极小元, 上界, 上确界, 下界, 下确界。

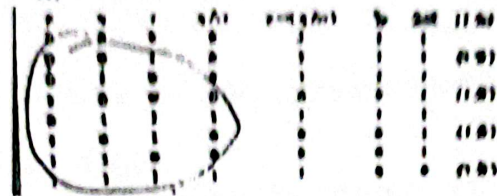
2019 年 12 月 6 日

1. (1) 0-05 (2) 1-00 7-00

$$H_2 = (64, 20, 64, 20)$$

1. 0 2. 0 3. 0

1.


$$= (pV - q) \wedge (rV - p)$$
$$= (p \vee q \vee (r \wedge \neg r)) \wedge (p \vee (q \wedge \neg q) \vee r)$$
$$= (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r)$$
$$= (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \quad (\text{主合取范式})$$
$$= N_0 \wedge M_0 \wedge M_1$$
$$=m_1V \quad m_2V \quad m_3V \quad m_4V \quad m_5V$$
$$= (A \cup B) \cap \sim A$$
$$= (A \cap B) \cup (B \cap A)$$
 $\beta - A$

(1) s 附加前提引入

(2) $\neg \forall x P$ 前提引入

(3) $s \rightarrow p$ (2) 置换

(4) p (1) (3) 假言推理

(5) $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ 前提引入

(6) $q \rightarrow r$ (4) (5) 假言推理

(7) q 前提引入

(8) r (6) (7) 假言推理

(9) $s \rightarrow r$

5. (1) 偏序关系 R 的哈斯图为:

(2) B 的最大元: 无; 最小元: 无;

极大元: 2,5; 极小元: 1,3;

下界: 4; 下确界: 4;

上界: 无; 上确界: 无;

