

南京邮电大学 2022/2023 学年第 1 学期

《概率论与数理统计》期末试卷(B)

院(系) _____ 班级 _____ 学号 _____ 姓名 _____

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

得分 _____ 一、填空题 (每空 3 分, 共 36 分)

1. 设 A, B, C 为三个事件, 则事件 A 与 B 发生而 C 不发生可以表示为 $ABC\bar{C}$
2. 设事件 A, B 互不相容, 且 $P(A)=0.7, P(B)=0.2$, 则 $P(A \cup B)$ 0.9
3. 设 X 和 Y 相互独立, 且 $X \sim B(3, 0.1), Y \sim B(5, 0.1)$, 则 $Z = X + Y \sim$ $B(8, 0.1)$
4. 已知 X 服从参数为 $\lambda = 4$ 的指数分布, 则 $P(-1 \leq X < 2) =$ $1 - e^{-8}$
5. 设 X_1, X_2 是来自 $N(8, 4)$ 的简单样本, 则 $P(\min\{X_1, X_2\} > 8) =$ 0.25
6. 已知随机变量 $(X, Y) \sim N(2, -1; 3, 6; 0)$, $Z = X + Y$, 则 $P(Z=0) =$ 0
 $P(-2 \leq Z \leq 4) =$ $2\Phi(1) - 1$ (用 $\Phi(\cdot)$ 表示)
7. 若随机变量 $X \sim U(-2, 4)$, 且由切比雪夫不等式 $P(|X - \mu| < \varepsilon) \geq \frac{2}{3}$, 则 $\varepsilon =$ 3
8. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 独立同分布, 且 $E(X_k) = 2, D(X_k) = 7, k = 1, 2, \dots, n$
 则 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k^2$ 依概率收敛于 11

9. 已知随机变量 $X \sim B(10, 0.1), Y \sim \chi^2(5)$, 且 X, Y 不相关, 则 $E(XY + DX) =$ 5.9

10. $X_1, \dots, X_7$ 是取自正态总体 $N(0, 2^2)$ 的一个简单随机样本, S^2 为其样本方差,

则 $D(S^2) =$ 2

11. 设 $X_1, X_2, \dots, X_8$ 为来自总体 $N(0, 0.5^2)$ 的一个简单随机样本, 若已知 $\chi_{0.01}^2(8) = 20.0$,

$$X_i \sim N(0, 0.5^2) \quad P\left\{\sum_{i=1}^8 X_i^2 \geq 25\right\} = P\left\{4 \sum_{i=1}^8 X_i^2 \geq 20\right\} = P\left\{\chi_{0.01}^2(8) \geq 20\right\} = 0.01$$

$$\text{则 } P\left(\sum_{k=1}^8 X_k^2 \geq 5\right) = \underline{0.01}$$

$$\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}$$

12. 设 $X_1, X_2, \dots, X_9$ 是来自总体 $N(\mu, 0.3^2)$ 的简单样本, 样本均值 $\bar{x} = 5$, 则未知参

数 μ 的置信度为 0.95 的置信区间是 (5 ± 0.196) (已知 $z_{0.025} = 1.96$)

得分 _____

二、一单位有甲、乙两人, 已知甲近期出差的概率为 0.8, 若甲出差, 则乙出差的概率为 0.2; 若甲不出差, 则乙出差的概率为 0.9.

- (1) 求乙近期出差的概率: $P(B|A) = 0.2, P(B|\bar{A}) = 0.9$
- (2) 若已知乙近期出差, 求甲出差的概率. (8 分)

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 0.2 \quad \therefore P(B) = P(A) \cdot P(B|A) + P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A}) = 0.34$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)} = \frac{0.16}{0.34} = \frac{8}{17}$$

得分 _____

设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{a}, & 0 < x < 3 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, Y = X^2 + 1.$$



(1) 求常数 a 的值; (2) 求 Y 的概率密度函数 $f_Y(y)$. (10 分)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = \frac{1}{a} \int_0^3 x^2 dx = \frac{9}{a} = 1 \quad \therefore a = 9$$

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{X^2 + 1 \leq y\} = P\{\sqrt{y-1} \leq X \leq \sqrt{y-1}\} = F_X(\sqrt{y-1}) - F_X(-\sqrt{y-1})$$

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = f_X(\sqrt{y-1}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y-1}} = \frac{1}{18\sqrt{y-1}}, \quad y \in (1, 10)$$

$$\therefore f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{18\sqrt{y-1}}, & 1 < y < 10 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$



得分

四、一盒同型号的螺丝钉共有 100 个，已知一个该型号的螺丝钉的重量 X_i 是一个随机变量，其数学期望是 100 克，标准差是 10 克，用中心极限定理计

算一盒螺丝钉的重量 $\sum_{i=1}^{100} X_i$ 超过 10 千克的概率。(10 分)

$$X_i \sim N(0.1, 0.01) \quad Y = \sum_{i=1}^{100} X_i$$

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{100} E(X_i) = 10, \quad D(Y) = 1$$

$$\therefore P\{Y > 10\} = P\{Y - 10 > 0\} = 1 - P\{Y - 10 < 0\} = 1 - \Phi(0) = 0.5$$

得分

五、若随机变量 (X, Y) 的协方差矩阵为 $\begin{pmatrix} 2 & a \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ ，计算 $D(X - 2Y + 3)$ 和 $\text{Cov}(X + 2Y, X - Y)$ 的值。(10 分)

$$D(X) = 2, \quad D(Y) = 9, \quad \text{Cov}(X, Y) = 3$$

$$D(X - 2Y + 3) = D(X - 2Y) = D(X) + D(-2Y) + 2\text{Cov}(X, -2Y)$$

$$= D(X) + 4D(Y) - 4\text{Cov}(X, Y) = 2 + 36 - 12 = 26$$

$$\text{Cov}(X + 2Y, X - Y) = D(X) - 2D(Y) + \text{Cov}(X, Y)$$

$$= 2 - 18 + 3 = -13$$

得分

六、已知总体 X 的概率分布为 $\begin{matrix} X & 1 & 2 & 3 \\ P & \theta^2 & 2\theta(1-\theta) & (1-\theta)^2 \end{matrix}$ ，其中

$\theta (0 < \theta < 1)$ 是未知参数。利用总体 X 的如下样本值：2, 3, 1, 2, 1, 3

求 θ 的矩估计值和最大似然估计值。(8 分)

$$\text{矩估计: } \mu_1 = E(X) = \theta^2 + 4\theta(1-\theta) + 3(1-\theta)^2 = 3 - 2\theta \quad \therefore \theta = \frac{3 - \mu_1}{2}$$

$$\therefore \hat{\theta} = \frac{3 - \bar{x}}{2} = \frac{3 - E(X)}{2} = \frac{3 - 2}{2} = 0.5$$

$$\text{最大似然估计: } L(\theta) = P\{X_1=2, X_2=3, X_3=\dots, X_6=3\} = P\{X_1=2\} \cdot P\{X_2=3\} \cdots P\{X_6=3\}$$

$$= \theta^2 \cdot \theta^2 \cdot 2\theta(1-\theta) \cdot 2\theta(1-\theta) \cdot (1-\theta)^2 \cdot (1-\theta)^2 = 4\theta^6 \cdot (1-\theta)^6$$

$$\ln L(\theta) = \ln 4 + 6 \ln \theta + 6 \ln(1-\theta)$$

$$\therefore \frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = 6\left(\frac{1}{\theta} + \frac{1}{1-\theta}\right) = 0 \quad \therefore \theta = 0.5$$

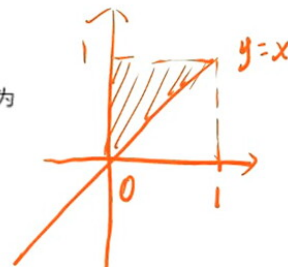
$$\therefore \theta \text{ 的最大似然估计值 } \hat{\theta} = 0.5$$

《概率论与数理统计》试卷 B 第 3 页 共 4 页

得分

七、设二维随机变量 (X, Y) 的联合密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} 8xy, & 0 < x < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$



(1) 求 $f_X(x)$, $f_Y(y)$ ；并判断 X 与 Y 是否独立：

(2) 求条件密度函数 $f_{X|Y}(x|y)$ 。(10 分)

$$(1) f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_x^1 8xy dy = 4xy^2 \Big|_x^1 = 4x - 4x^3, \quad x \in (0, 1)$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \int_0^y 8xy dx = 4x^2 y \Big|_0^y = 4y^3, \quad y \in (0, 1)$$

$$\therefore f_X(x) = \begin{cases} 4x - 4x^3, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} 4y^3, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$f_X(x) \cdot f_Y(y) \neq f(x, y) \quad \therefore \text{不独立}$$

$$(2) f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{8xy}{4y^3} = \frac{2x}{y^2}, \quad 0 < x < y < 1$$

$$\therefore f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{2x}{y^2}, & 0 < x < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

得分

八、设某品牌某型号的新能源纯电动汽车充满电后行驶的里程，即续航里程服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 。今随机地抽取 10 辆该型号的汽车，测得样本方差

为 $s^2 = 92.62 \text{ km}^2$ ，在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下，是否可以认为这种型号的新

能源汽车充满电后的续航里程的方差为 100 km^2 ?

$$(\chi_{0.025}^2(9) = 19.022, \chi_{0.975}^2(9) = 2.7) \quad (8 \text{ 分})$$

$$\textcircled{1} H_0: \sigma^2 = 100 \quad H_1: \sigma^2 \neq 100$$

$$\textcircled{2} \chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$

$$\textcircled{3} \text{拒绝域: } \chi^2 \geq \chi_{0.025}^2(9) = 19.022 \text{ 或 } \chi^2 < \chi_{0.975}^2(9) = 2.7$$

$$\textcircled{4} \text{观测值 } \chi^2 = \frac{9 \cdot 92.62}{100} = 8.3358$$

$$\textcircled{5} 2.7 < 8.3358 < 19.022 \quad \therefore \text{未落入拒绝域}$$

故接受 H_0 。...

《概率论与数理统计》试卷 B 第 4 页 共 4 页

《概率论与数理统计》期末试卷 (A)

本试卷共 4 页; 考试时间 110 分钟;

院(系) _____ 班级 _____ 学号 _____ 姓名 _____

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

得分 _____ 一、填空题 (每个空格 3 分, 共 48 分)

1. 设 A, B, C 是随机试验 E 的三个事件, 则事件 "A, B, C 都不发生" 可表示为 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$

2. 设 A, B 为随机事件, $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.3$, $P(A \cup B) = 0.5$, 则

$$P(AB) = 0.2, P(B|A) = 0.5$$

3. 设随机变量 $X \sim U(0, 1)$, 则 $Y = e^x$ 的概率密度为 $f_Y(y) = \frac{1}{y} (1 < y < e)$

4. 已知 X 与 Y 相互独立, $X \sim P(2)$, $Y \sim P(6)$, 则 $X + Y \sim P(8)$

5. 两个相互独立的标准正态随机变量的和 不再 (选填: 仍然、不再) 满足标准正态分布

6. 随机变量 X, Y 满足 $X = -2.5Y + 1.8$, 则相关系数 $\rho_{XY} = -1$

7. 设 $E(X) = \mu$, $D(X) = \sigma^2$, 则由契比雪夫不等式有: $P(|X - \mu| < 4\sigma) \geq \frac{15}{16}$

8. 设 X_1, X_2, X_3, X_4 是取自总体 X 的一个样本, 而 $Y = 0.2(X_1 + X_2 + X_3) + aX_4$ 是总体期望 μ 的无偏估计量, 则 $a = 0.4$. 样本均值 $\bar{X}$ 也是 μ 的无偏估计量, 与 Y 相比, 更有效的是 $\bar{X}$ (选填: $\bar{X}$ 、Y)

9. 已知 $T \sim t(27)$, 则 $T^2 \sim F(1, 27)$

10. 设总体 $X \sim \chi^2(14)$, $X_1, X_2, \dots, X_{20}$ 是来自总体 X 的一个简单随机样本, 则

$$E(\bar{X}) = 14, D(\bar{X}) = 1.4$$

(1) 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, μ, σ^2 均未知, 则总体方差 σ^2 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的单侧置信下限为 $\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}$

(2) 设矿石中某种元素的含量服从正态分布, 但均值 μ 和方差 σ^2 均未知, 现已测定一个容量为 n 的样本, 如果在显著性水平 α 下做假设检验 $H_0: \mu = 0.49$, 则检验统计量应选择 $T = \frac{\bar{X} - 0.49}{S/\sqrt{n}}$, 拒绝域为 $|t| \geq t_{\alpha/2}(n-1)$

得分 _____ 二、(12 分) 下表给出了二维离散型随机变量 (X, Y) 的联合分布律。

(1) 请将关于 X 和 Y 的边缘分布律填进下表中。

	Y	1	2	3	$P(X = x_i)$
X	1	0.1	0.1	0.1	0.3
2	0	0.2	0.2	0.2	0.4
3	0	0	0.3	0.3	0.3
$P(Y = y_j)$		0.3	0.3	0.6	1

(2) 求概率 $P(X + Y = 3)$. $P(X + Y = 3) = 0 + 0.1 = 0.1$

(3) X 和 Y 是否相互独立? 为什么? $P(X=1, Y=1) = 0.1 \neq 0.3 \cdot 0.3$ 所以 X 和 Y 不独立

(4) 将 Y = 2 条件下, X 的条件分布律填进下面表格中。

x_i	1	2	3
$P(X=x_i Y=2)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0

得分

三、(10分) 设有 1000 件相同的产品，其中 500 件甲厂生产，400 件乙厂生产，100 件丙厂生产。已知甲乙丙三厂的次品率分别为 0.1, 0.15 和 0.2。

(1) 从中任取一件产品，求它是次品的概率：

(2) 如果任取一件发现是次品，求该产品是丙厂生产的概率。

解：设选到甲、乙、丙的概率分别为 A, B, C，次品为 D

$$\therefore P(A)=0.5, P(B)=0.4, P(C)=0.1, P(D|A)=0.1, P(D|B)=0.15, P(D|C)=0.2$$

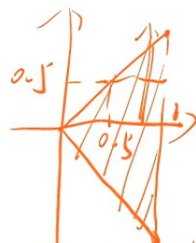
$$\therefore P(D)=P(A) \cdot P(D|A) + P(B) \cdot P(D|B) + P(C) \cdot P(D|C) = 0.5 \cdot 0.1 + 0.4 \cdot 0.15 + 0.1 \cdot 0.2 = 0.11$$

$$(2) P(C|D) = \frac{P(CD)}{P(D)} = \frac{P(D|C) \cdot P(C)}{P(D)} = \frac{0.1 \cdot 0.2}{0.11} = \frac{2}{11}$$

得分

四、(10分) 已知随机变量 (X, Y) 的概率密度函数为：

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, |y| < x, \\ 0, & \text{其它。} \end{cases} \quad x < y < x$$



(1) 求概率 $P(Y > 0.5)$ ；

(2) 求 $\text{Cov}(X, Y)$ ，并判断随机变量 X 和 Y 是否相关。

$$(1) P(Y > 0.5) = P(X, Y) \text{ 落在 } Y > 0.5 \text{ 区域} = \int_{0.5}^1 \int_{-x}^x f(x, y) \cdot dx \cdot dy = \int_{0.5}^1 \int_{-x}^x 1 \cdot dy \cdot dx = \frac{1}{8}$$

$$(2) E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy \cdot f(x, y) \cdot dx \cdot dy = \int_0^1 \int_{-x}^x xy \cdot dy \cdot dx = 0$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x, y) \cdot dx \cdot dy = \int_0^1 \int_{-x}^x x \cdot dy \cdot dx = \int_0^1 2x^2 \cdot dx = \frac{2}{3}$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f(x, y) \cdot dx \cdot dy = \int_0^1 \int_{-x}^x y \cdot dy \cdot dx = 0$$

$$\therefore \text{Cov}(X, Y) = \frac{E(XY) - E(X) \cdot E(Y)}{\sqrt{D(X) \cdot D(Y)}} = 0 \quad \therefore \text{不相关}$$

得分

五、(12分) 设总体 X 的分布律为

X	1	2	3
p	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

，其中未

知参数 $\theta \in (0, 1)$ 。利用总体 X 的如下样本值 1, 1, 3, 3, 2，求参数 θ 的

矩估计值和最大似然估计值。

$$\text{矩估计: } \mu_1 = E(X) = \theta^2 + 2 \cdot 2\theta(1-\theta) + 3 \cdot (1-\theta)^2 = 3 - 2\theta \quad \therefore \theta = \frac{3 - \mu_1}{2}$$

$$\therefore \hat{\theta} = \frac{3 - \bar{X}}{2} \quad \because \bar{X} = E(X) = 2 \quad \therefore \hat{\theta} = 0.5$$

$$\text{最大似然估计: } L(\theta) = P\{X_1=1, X_2=2, \dots, X_5=2\} = P\{X_1=1\} \cdot P\{X_2=2\} \cdot P\{X_3=2\} \cdot P\{X_4=2\} \cdot P\{X_5=2\}$$

$$= \theta^2 \cdot \theta^2 \cdot (1-\theta)^2 \cdot (1-\theta)^2 \cdot 2\theta(1-\theta)$$

$$= 4\theta^5 \cdot (1-\theta)^5$$

$$\therefore \ln L(\theta) = \ln 4 + 5 \ln \theta + 5 \ln(1-\theta)$$

$$\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = 5 \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{1-\theta} \right) = 0 \quad \Rightarrow \theta = 0.5$$

$\therefore \theta$ 的最大似然估计值为 0.5

得分

六、(8分) 某小学一年级有 500 名学生。假设第 i ($i = 1, \dots, 500$) 名学生来参加家长会的家长数为随机变量 X_i ，它们独立同分布，且每名学生无家长、有 1 名家长、有 2 名家长来参加家长会的概率分别是 0.1, 0.8 和 0.1。

(1) 用中心极限定理求参加家长会的家长总人数 $X = \sum_{i=1}^{500} X_i$ 满足的近似分布。

(2) 利用近似分布，求概率 $P(X > 520)$ 。(结果用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示)

$$\begin{array}{c|ccc} X_i & 0 & 1 & 2 \\ \hline P_i & 0.1 & 0.8 & 0.1 \end{array} \quad E(X_i) = \sum_{i=1}^3 X_i \cdot P = 0 \cdot 0.1 + 1 \cdot 0.8 + 2 \cdot 0.1 = 1$$

$$D(X_i) = \sum_{i=1}^3 (X_i - E(X_i))^2 \cdot P = 1^2 \cdot 0.1 + 0 + 1^2 \cdot 0.1 = 0.2$$

$$\therefore X = \sum_{i=1}^{500} X_i \quad \therefore E(X) = \sum_{i=1}^{500} E(X_i) = 500 \quad D(X) = \sum_{i=1}^{500} D(X_i) = 100$$

$$\therefore X \overset{\text{近似}}{\sim} N(500, 100)$$

$$(2) P\{X > 520\} = 1 - P\{X \leq 520\} = 1 - P\left\{\frac{X - 500}{\sqrt{100}} \leq \frac{20}{10}\right\} = 1 - \Phi(2)$$

《概率论与数理统计》期末试卷(A)(17)

院(系) _____ 班级 _____ 学号 _____ 姓名 _____

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

一、填空题 (共 42 分, 每空 3 分)

- 设 A, B, C 为三个随机事件, 则 A, B, C 至少有一个发生可表示为 $A \cup B \cup C$
- 设 A, B 为两个随机事件, 已知 $P(A) = 0.6$, $P(\bar{B}) = 0.8$, 且 A, B 有包含关系, 则 $P(A - B) = 0.4$
 $P(A - B) = P(A - AB) = P(A) - P(AB)$
 $\frac{C_1 \cdot C_2}{C_3} = \frac{1}{20}$
- 从 1 到 10 中任取 3 个号码, 则最大号码为 5 的概率是 $\frac{1}{20}$
- 设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布, 则 $E(X^2) = 2$
 $X \sim P(1)$ $E(X) = P(X) = 1$ $E(X^2) = E^2(X) + D(X)$
 $E(Z) = 4E(X) - E(Y) = 4 - 2 = 2$
- 设 X 与 Y 独立, $X \sim N(1, 1), Y \sim N(2, 9)$, 则 $Z = 4X - Y$ 的概率密度函数为:
 $f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 5} \cdot e^{-\frac{(z-2)^2}{50}}$ $-\infty < z < \infty$ $D(Z) = 16D(X) + D(Y) = 16 + 9 = 25$
- 设随机变量 (X, Y) 的协方差矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$, 则 $Cov(X + Y, X - 2Y) = -10$
 $D(Y) = P(Y) - 2D(X) - Cov(X, Y) = 1 - 9 - 2 = -10$
- 设随机变量 X 与 Y 独立同分布, 已知 X 的分布函数为 $F(X)$, 则 $Z = \max\{X, Y\}$ 的分布函数 $F_Z(z) = F^2(z)$
 $F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{\max\{X, Y\} \leq z\} = P\{X \leq z, Y \leq z\} = P\{X \leq z\} \cdot P\{Y \leq z\}$
 $E(X) = 50$, $D(X) = 25$ $1 - P\{X \leq 50\} = 1 - F(50) = 0.5 = F(50) \cdot F(50)$
- 设 X 与 Y 独立, $X \sim \chi^2(3), Y \sim \chi^2(6)$, 则 $X + Y \sim \chi^2(9)$
- 设 n_A 是 n 次独立重复试验中 A 发生的次数, $P(A) = p$, 则对任意的 $\varepsilon > 0$, 有
 $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right\} = 0$

$$T = \frac{\bar{X}}{\frac{S^2}{n}} \quad T^2 = \frac{\bar{X}^2}{\frac{S^2}{n}} = \frac{\bar{X}^2/n}{S^2/n} \quad \therefore \frac{1}{T^2} = \frac{Y/5}{X^2/1}$$

11. 已知随机变量 $T \sim t(5)$, 则 $\frac{1}{T^2} \sim F(5, 1)$

12. 设总体 $X \sim B(10, 0.2)$, $\bar{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差, 则 $E(\bar{X} + S^2) = 3.6$
 $E(X) = 2$, $D(X) = 1.6$ $E(\bar{X} + S^2) = E(\bar{X}) + E(S^2) = E(X) + D(X) = 3.6$

13. 设 X_1, X_2, X_3 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 若 $T = \frac{1}{6}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{6}X_3$, 为 μ 的无偏估计量, 则 $a = \frac{1}{2}$
 $(\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6})\mu = \mu$

14. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其中 μ, σ^2 未知, $X_1, \dots, X_n$ 为其样本, 则均值 μ 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的置信区间为 $(\bar{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1))$
 $-\frac{t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \cdot S}{\sqrt{n}} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \leq \frac{t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \cdot S}{\sqrt{n}}$

二、(8 分) 设某产品由甲、乙、丙三个厂生产, 各厂生产的比例分别为 0.3, 0.2, 0.5. 已知这三个厂的产品次品率依次为 0.02, 0.05, 0.03, 现从中任取一件产品: (1) 问该产品是次品的概率是多少? (2) 设取到的是次品, 问它是由乙厂生产的概率是多少?
 $P(A) = 0.3, P(B) = 0.2, P(C) = 0.5, P(D|A) = 0.02$
 $P(D|B) = 0.05, P(D|C) = 0.03$

$$(1) P(D) = P(A) \cdot P(D|A) + P(B) \cdot P(D|B) + P(C) \cdot P(D|C) = 0.006 + 0.010 + 0.015 = 0.031$$

$$(2) P(B|D) = \frac{P(B) \cdot P(D|B)}{P(D)} = \frac{0.010}{0.031} = \frac{10}{31}$$

三、(12 分) 设 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} 1, & |y| < x, 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

(1) 求 $f_X(x), f_Y(y)$, 并判断 X 与 Y 是否相互独立? (2) 求 $Cov(X, Y)$,

并判断 X 与 Y 是否相关.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \cdot dy = \int_{-x}^x 1 \cdot dy = 2x \quad \therefore f_X(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \cdot dx = \begin{cases} \int_{-y}^1 1 \cdot dx = 1 + y, & -1 < y < 0 \\ \int_y^1 1 \cdot dx = 1 - y, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$\therefore f(x, y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y) = \text{不独立}$$

$$(2) E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy \cdot f(x, y) \cdot dx \cdot dy = \int_0^1 \int_{-x}^x xy \cdot dy \cdot dx = 0$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_Y(y) \cdot dy = \int_{-1}^0 y \cdot (1 + y) \cdot dy + \int_0^1 y \cdot (1 - y) \cdot dy = 0$$

$$E(X) = \dots \therefore Cov(X, Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y) = 0$$

得分

四. (10分) 设随机变量 $X \sim N(0,1)$, 求 $Y=|X|$ 的概率密度?

$$X \sim N(0,1) \quad \therefore f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{|X| \leq y\} = P\{-y \leq X \leq y\} = F_X(y) - F_X(-y)$$

$$\therefore f_Y(y) = f_X(y) \cdot 1 - f_X(-y) \cdot (-1) = f_X(y) + f_X(-y)$$

$$\therefore f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}, & y \geq 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}$$

得分

五. (10分) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 $X \sim N(4,12), Y \sim N(8,4)$,求: (1) 随机变量 $Z=Y-X$ 的概率密度; (2) 概率 $P(Y>X)$ 。(1) $\Phi(1) = 0.8413$

$$E(Z) = E(Y-X) = E(Y) - E(X) = -4$$

$$D(Z) = D(Y-X) = D(Y) + D(X) = 16$$

$$\therefore Z \sim N(-4, 16)$$

$$\therefore f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 4} \cdot e^{-\frac{(z+4)^2}{32}}, \quad z \in (-\infty, +\infty)$$

$$\begin{aligned} (2) P\{Y > X\} &= P\{Y-X > 0\} = P\left\{\frac{Y-X+4}{4} > 1\right\} = 1 - P\left\{\frac{Y-X+4}{4} \leq 1\right\} \\ &= 1 - \Phi(1) = 0.1587 \end{aligned}$$

得分

六. (10分) 设总体 X 具有分布律: $\frac{X}{P} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ \theta^2 & 2\theta(1-\theta) & (1-\theta)^2 \end{matrix}$, 其中 θ (0 < θ < 1) 为未知参数, 已知取得了样本值 1, 3, 2, 3, 1, 2, 求 θ 的矩估计值和最大似然估计值。

0.5

得分

七. (8分) 设某异常区磁场强度服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 由以前观测知道 $\mu_0 = 56$, 现有一台新型号的仪器, 用此仪器对该地区进行磁测, 抽取了 64个点, 测得平均值为 $\bar{X} = 60.5$, 已知 $\sigma = 20$, 问用此仪器测出的结果是否符合要求?($\alpha = 0.05$) ($\Phi(1.645) = 0.95$, $\Phi(1.96) = 0.975$)

$$\textcircled{1} H_0: \mu = 56, \quad H_1: \mu \neq 56$$

$$\textcircled{2} Z = \frac{\bar{X} - 56}{\sigma/\sqrt{n}}$$

$$\textcircled{3} \text{拒绝域 } |Z| \geq Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

$$\textcircled{4} Z = \frac{60.5 - 56}{20/8} = 1.8$$

$$\textcircled{5} -1.96 < 1.8 < 1.96 \quad \therefore \text{未落入} \dots \text{接受 } H_0$$

 $\therefore$ 可以认为...