



1.1 随机事件

- ① 可重复性: 可以在相同条件下重复进行
- ② 可预知性: 每次试验结果不止一个且事先知道所有结果
- ③ 不确定性: 每次试验不确定结果

样本空间

随机试验的所有可能结果构成的集合 记为 $\Omega = \{ \quad \}$

样本点

Ω 中每一个元素

随机事件

Ω 的子集称为随机事件 记为 A, B, C

例. 写出下列试验的样本空间.

框框老师课堂 bilibili

- (1) E_1 : 抛一枚硬币两次, 观察正反面朝上的情况. (正面: H, 反面: T)

$$\Omega = \{ HH, HT, TT, TH \}$$

- (2) E_2 : 抛一枚硬币两次, 观察出现正面的次数.

$$\Omega = \{ 0, 1, 2 \}$$

- (3) E_3 : 某市急救中心的电话台一夜中接到的呼唤次数.

$$\Omega = \{ 0, \dots, n \}$$

1.2

事件的包含：

$A \subseteq B \Leftrightarrow$ 若事件A发生 则必导致B发生



事件的和

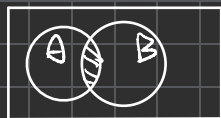
$A \cup B$ 或 $A + B$ $\left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow A \text{ 发生或者 } B \text{ 发生} \\ \Rightarrow A \text{ 与 } B \text{ 至少发生一个} \end{array} \right.$



PS: $A \cup B \cup C$, 三事件中至少发生一个

事件的积

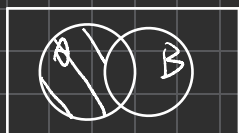
AB 或 $A \cap B$ $\left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow \text{事件A发生而且事件B发生} \\ \Rightarrow \text{事件A, B同时都发生} \end{array} \right.$



PS: $A \cap B \cap C = ABC \Leftrightarrow A, B, C$ 均发生

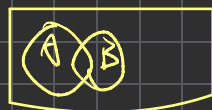
事件的差

$A - B \Leftrightarrow A$ 发生但 B 不发生



PS: $A - B - C \Leftrightarrow A$ 发生, B, C 都不发生

$A - B = A - AB$ ☆



互不相容事件 (互斥事件)

$$A \text{ 与 } B \text{ 互斥} \Leftrightarrow A \cdot B = \emptyset$$



对立事件 (对偶事件)

$$A \text{ 与 } B \text{ 对立} \Leftrightarrow \begin{cases} ① A \cdot B = \emptyset \\ ② A \cup B = \Omega \end{cases}$$



$$\text{记为 } \begin{cases} \bar{A} = B \\ \bar{B} = A \end{cases}$$

$$\text{P.S.: } A - B = A - A \cdot B = A \cdot \bar{B} \quad (A \text{ 发生 } B \text{ 不发生})$$

$$A \text{ 与 } B \text{ 对立} \Leftrightarrow A \text{ 与 } \bar{B} \text{ 互斥}$$

事件运算 满足的定律

① 交换律: $A \cup B = B \cup A$
 $A \cap B = B \cap A$

② 结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

③ 分配律: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
 $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

④ 德摩根律 (对偶律) (长杠变短杠, 开闭改开闭)

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

例: 设 A, B, C 是三个事件, 试用 A, B, C 表示下列事件: 框框老师课堂

(1) A, B 都发生, C 不发生. (1) $AB\bar{C}$ 或 $AB - C$

(2) A, B, C 恰有一个发生. (2) $A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C$

(3) A, B, C 至少发生一个. (3) $A \cup B \cup C$

(4) A, B, C 至少发生两个. (4) $AB \cup AC \cup BC$

1.3 概率

- ① 非负性: $0 \leq P(A) \leq 1$
- ② 规范性: $P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0$
- ③ 有限可加性: 若 A, B 互斥, 则 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- ④ 互补性: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

重要公式:

① 减法公式

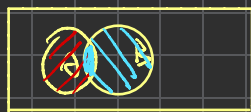
$$P(A-B) = P(A) - P(AB)$$



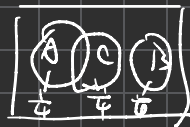
$$P(A-B) = P_A - P_{AB} \\ = A - \bar{B}$$

② 加法公式

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$



$$PS: P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) \\ - P_{AB} - P_{AC} - P_{BC} + P_{ABC}$$



例: 设 $P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{2}$, (1) 若 $P(AB) = \frac{1}{8}$, 求 $P(\bar{A})$ (2) 若 $A \subset B$, 求 $P(\bar{B}|\bar{A})$

PS: 看见 $\bar{A}$ 就把 A 取补, 就用减法

$$(1) P(B|\bar{A}) = P(B-A) = P_B - P_{AB} \\ = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \\ = \frac{3}{8}$$

$$P(\bar{B}|\bar{A}) = P(\bar{B}-\bar{A}) = P_B - P_{AB} \\ = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \\ = \frac{3}{8}$$

$$P_B - P_A$$

$$(2) P(B|\bar{A}) = P(B-A) = P_B - P_{AB} \\ = P_B - P_A = \frac{1}{2}$$

例: 设 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}, P(AC) = \frac{1}{8}, P(AB) = P(BC) = 0$, 求 $A \cup B \cup C$ 的概率

事件 $A \cup B \cup C$ 中至少发生一个的概率

$$A \cup B \cup C$$

$$P(A \cup B \cup C) = P_A + P_B + P_C - P_{AB} - P_{AC} - P_{BC} + P_{ABC} \\ = \frac{3}{4} - \frac{1}{8} - 0 - 0 = \frac{5}{8}$$

1.4 古典概型

① 有限性：试验E的样本空间 Ω 是有限集合 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$

② 等可能性： $P(\omega_1) = P(\omega_2) = \dots = P(\omega_n) = \frac{1}{n}$

计算公：设 $A \subset \Omega$, A发生概率

$$P(A) = \frac{A \text{ 含样本个数}}{\Omega \text{ 含样本个数}}$$

eg. 掷骰子 $A = \{1, 3, 5\} \Rightarrow P_A = \frac{A \text{ 含样本}}{\Omega \text{ 含样本}} = \frac{3}{6}$

例. 袋中有5只白球, 6只黑球, 从中取出2球, 作不放回抽样.

求 (1) 取出的2球为“1白1黑”的概率.

(2) 取出的2球为“至少黑”的概率.

[分析]: 复习: ① 排列: A_n^2 表示从n个不同元素中任取2个排成一列的排法.

② 组合: C_n^2 表示从n个不同元素中任取2个, 不计顺序的取法.

解: (1) 设 $A = \text{“2球为1白1黑”}$ (注1) $P(A) = \frac{A \text{ 样}}{\Omega \text{ 样}} = \frac{5^1 \cdot 6^1}{C_{11}^2} = \frac{6}{11}$

(注2): $P(A) = \frac{A \text{ 样}}{\Omega \text{ 样}} = \frac{5 \text{ 白后黑} + 6 \text{ 黑后白}}{A_{11}^2} = \frac{A_5^1 A_6^1 + A_6^1 A_5^1}{A_{11}^2} = \frac{6}{11}$

如果用排列
则分母上下都
用排列

例. 在房间里有10人, 分别佩戴从1号到10号的纪念章, 任取3人,

记录其纪念章的号码, 求最大号码为5的概率.

设 $A = \text{“3人中最大号码为5”}$

$$P_A = \frac{C_4^2 \cdot 1}{C_{10}^3} = \frac{1}{20}$$

如果用组合则
分母上下都用组
和

例. 有一个袋子中装有 1-5 号的 5 个球, 从袋中有放回地取 3 次, 每次取 1 球 (共取得 3 球), 问: 3 个球的号码组成的 3 位数为奇数的概率?

设 $A = \{ \text{3 个号码组成奇数} \}$

$$\begin{array}{ccc} \square & \square & \square \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ C_5^1 & C_5^1 & C_5^1 \end{array}$$

$$P_A = \frac{C_5^1 C_5^1 C_5^1}{5^3} = \frac{3}{5}$$

1.5 几何概型

① 样本空间 Ω 与几何区域有关 (线段, 平面, 立体)

② 可能性: 同 Ω 的区域内任意取点, 落在区域内任何一点的可能性相等

eg: 

计算公式: 设任意事件 $A \subset \Omega$

$$P_A = \frac{A \text{ 的长、面积、体积}}{\Omega \text{ 的长、面积、体积}} \quad \left(\frac{\text{小长}}{\text{大长}}, \frac{\text{小面积}}{\text{大面积}} \right)$$

例. 在区间 $(0, 1)$ 上随机取两个数, 则这两个数的差的绝对值小于 $\frac{1}{2}$ 的概率为 _____.

解: 设这两个数分别为 x, y . $\Omega = \{ 0 < x < 1, 0 < y < 1 \}$ 如图



$$A = \{ |x - y| < \frac{1}{2} \}$$

$$y = x \pm \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{求 } S_{\text{阴}} &= S_{\square} - 2S_{\triangle} \\ &= 1 - 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\therefore P_A = \frac{S_{\text{阴}}}{S_{\square}} = \frac{3}{4}$$

例. 随机地向半圆 $0 < y < \sqrt{2ax - x^2}$, (a 为正常数) 内投一点, 则原点 O 与该点的连线与 x 轴的夹角小于 $\frac{\pi}{4}$ 的概率为_____.

解: $S = \text{上半圆} = \begin{cases} 0 < y < \sqrt{2ax - x^2} \\ 0 < x < 2a \end{cases}$

$$\Rightarrow S_n = \frac{1}{2} S_{\text{圆}} = \frac{1}{2} \pi a^2$$



$A = \{\text{如图中的红色阴影部分}\} \Rightarrow S_A = \text{扇形} = S_{\text{扇}} + \frac{1}{4} S_{\text{圆}} = \frac{a^2}{2} + \frac{\pi a^2}{4}$

$$\therefore P(A) = \frac{S_A}{S_n} = \frac{\frac{a^2}{2} + \frac{\pi a^2}{4}}{\frac{\pi a^2}{2}} = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}$$

1.6 条件概率与乘法公式

设 A, B 为两个事件 且 $P(A) > 0$ 称 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$ 为 B 在 A 下条件

概率: ① $P(A|A) = 1$

② $P(\emptyset|A) = 0$

③ $P(\bar{B}|A) = 1 - P(B|A) \rightarrow \frac{P(\bar{B}A)}{P(A)} = \frac{P(A-B)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(AB)}{P(A)} = 1 - \frac{P(AB)}{P(A)}$

$(P(\bar{B}|A) = \frac{P(\bar{B}A)}{P(A)} = \frac{P(A-B)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(AB)}{P(A)} = 1 - \frac{P(AB)}{P(A)}$

④ $P(B \cup C|A) = P(B|A) + P(C|A) - P(BC|A) = 1 - P(\bar{B}|A)$

⑤ $P(B-C|A) = P(B|A) - P(BC|A)$

$P(B \cup C|A) = P(B|A) + P(C|A) - P(BC|A)$

法不看 A , 写出侧面的 $P(A)$

乘法公式: $P(AB) = P(A)P(B|A)$ ($P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$)

PS: ① $P(ABC) = P(AB)P(C|AB)$

= $P(A)P(B|A)P(C|AB)$

① A 发生 ② B 发生 ③ C 发生

(此时 A 已发生) (此时 AB 已发生)
∴ A

例: 设 A, B, C 为随机事件, A 与 C 互不相容, $P(AB) = \frac{1}{2}$, $P(C) = \frac{1}{3}$.

则 $P(\overline{AB}|\overline{C}) =$ _____

解: $P(\overline{AB}|\overline{C}) = \frac{P(\overline{AB}\overline{C})}{P(\overline{C})} = \frac{P(AB-C) = P(AB) - P(ABC)}{P(\overline{C})}$

因 A 与 C 不相容

∴ $P(ABC) = 0$

= $\frac{\frac{1}{2} - 0}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}$

1.7 全概率公式与贝叶斯公式

1. 完备事件组: 设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为 Ω 的一个事件组, 且满足

① $A_1, A_2, \dots, A_n$ 两两互斥

② $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$ 则称 $A_1, \dots, A_n$ 为 Ω 的一个完备事件组 (或称为 Ω 的一个划分)

eg:

A_1	A_2
A_1	A_2

 A_1, A_2, A_3 为 Ω 的一个划分

2. 全概率公式 ($P(A_1B) + P(A_2B) + \dots + P(A_nB)$) 转换为乘法公式

B 为任一事件, $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为 Ω 的一个完备事件组

$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \dots + P(A_n)P(B|A_n)$

(解释 $P(B) = P(B \cap \Omega) = P(B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n))$)

= $P(BA_1 \cup BA_2 \cup \dots \cup BA_n)$ (两两互斥, $P(BA_1 \cup BA_2 \cup \dots \cup BA_n) = P(BA_1) + P(BA_2) + \dots + P(BA_n)$)

3. 贝叶斯公式

$P(A_j|B) = \frac{P(A_jB)}{P(B)} = \frac{P(A_j)P(B|A_j)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)}$

$P(A_1|B) = \frac{P(A_1B)}{P(B \cap \Omega)}$

注：利用全概率公式，贝叶斯公式时，如何找A的划分呢？

法1：把试验分为两个阶段，并把第一个阶段的所有可能结果 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 看成A的划分

法2：把B看成“结果”事件，再把导致B发生的若干“原因”看成A的划分

例：设甲袋中装有 n 个白球， m 个红球，乙袋中装有 N 个白球， M 个红球。

现从甲袋中任意取一个球放入乙袋中，再从乙袋中任意取一个球，问取到白球的概率是多少？

解

第一阶段：从甲中取1球放入乙中

第二阶段：从乙中取1球

A_1 ：从甲中取出的球为白球

B ：从乙中取白球

A_2 ：从甲中取出的球为红球

$\therefore A_1, A_2$ 构成划分

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) \quad \text{利用全概率}$$
$$= \frac{n}{n+m} \cdot \frac{N+1}{N+M+1} + \frac{m}{n+m} \cdot \frac{N}{N+M+1}$$

例：发报台分别以概率 0.6 和 0.4 发出信号 A 和 B，由于系统受到干扰，当发出信号 A 时，收报台分别以 0.8 和 0.2 收到信号 A 和 B；当发出信号 B 时，分别以 0.9 和 0.1 收到信号 B 和 A。如果收报台收到信号 A，问发报台发出信号是 A 的概率是多少？

设：第一阶段：发信号

第二阶段：收信号

C_1 ：发信号 A

D ：收到信号 A

C_2 ：发信号 B

$$P(C_1|D) = \frac{P(D)}{P(D)} = \frac{P(C_1)P(D|C_1)}{P(C_1)P(D|C_1) + P(C_2)P(D|C_2)} = \frac{0.6 \cdot 0.8}{0.6 \cdot 0.8 + 0.4 \cdot 0.1} = 0.824$$

PS：先设两个阶段，写出结果 再看 $\left\{ \begin{array}{l} \text{有条件——贝叶斯} \\ \text{无条件——全概率} \end{array} \right. \rightarrow$ 填

1.8 事件独立性

$$\frac{P_{AB}}{P_A} = P_B$$

加不加都得B, 没影响

若事件A, B满足 $P(B|A) = P_B$ 则称A与B相互独立

PS: 独立的本原: A与B互不影响

$$(2) \Leftrightarrow A \text{与} B \text{独立} \Leftrightarrow P(AB) = P_A \cdot P_B \Leftrightarrow P(B|A) = P(B|\bar{A})$$

$$\Leftrightarrow P(B|\bar{A}) = P_B$$

$$\Rightarrow P(B|A) + P(B|\bar{A}) = 1$$

$$\frac{P(AB)}{P_A} = \frac{P(B|\bar{A})}{1-P_A} = \frac{P_B - P_{AB}}{1-P_A}$$

带一个消法约

(3) 特别地, Ω 与任何事件B独立, $\emptyset$ 与任何事件B独立

2. 独立的性质

若A与B独立 $\Leftrightarrow A$ 与 $\bar{B}$ 独立; $\bar{A}$ 与B独立; $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 独立
有把无把对独立没有影响

3. 三个事件的独立性

若 $\left\{ \begin{array}{l} (1) P_{AB} = P_A \cdot P_B \\ (2) P_{AC} = P_A \cdot P_C \\ (3) P_{BC} = P_B \cdot P_C \\ (4) P_{ABC} = P_A \cdot P_B \cdot P_C \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \text{两两} \\ \text{独立} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \text{三事件} A, B, C \text{ 独立}$

注: 三事件A, B, C独立 $\Rightarrow$ A, B, C两两独立

还得加 $P_{ABC} = P_A P_B P_C$

若A, B, C独立 $\Rightarrow$ 则A与B的任意组合与C或 $\bar{C}$ 均独立

eg: $A \cup B$ 与C独立
 $A - B$ 与C独立

例. 设事件 A, B 独立, $P(A)=0.4$, $P(A \cup B)=0.7$, 求 $P(\bar{B}|A)$

$$P(\bar{B}|A) = \frac{P(\bar{B}A)}{P(A)} = \frac{P(A-B)}{P(A)} = \frac{P(A)-P(AB)}{P(A)}$$
$$= \frac{0.4-0}{0.4} = 1$$

$$\frac{P(A)-P(AB)}{P(A)} = \frac{P(A)-P(A)P(B)}{P(A)}$$

$$P(A)+P(B)-P(AB)=0.7 \Rightarrow P(B)=0.3$$

求证:

$$P_{AB} = P_A \cdot P_B$$

A 与 B 独立 $\Rightarrow$ B 与 A 独立 $\Rightarrow P(B|A) = P(B)$

↑
A 与 B 独立

$$\therefore P_{\bar{B}} = 1 - P_B$$

(独立不构成互斥, $\therefore P(A \cup B) \neq P(A) + P(B)$!!!)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P_{AB}$$

$$0.7 = 0.4 + P_B - 0.4P_B$$

$$\Rightarrow P_B = 0.5 \quad \therefore P_{\bar{B}} = 0.5$$

1.9 伯努利概型

(PS: 伯努利实验: 当实验 E 只有两种可能 A 与 $\bar{A}$ 则称为伯努利试验)

n 重伯努利实验: 做 n 次

2. 二项概率公式

每次试验有两种可能 A 与 $\bar{A}$, $P_A = p$, $P_{\bar{A}} = 1-p$

则发生 k 次概率: $P_{n(k)} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ ($k=0, 1, \dots, n$)

二项概率公式三要素: ① n 重试验

② 两种结果 A 与 $\bar{A}$

③ 每次 $P_A = p$

例. 设 n 次独立重复试验中, 每次试验只有两种可能结果 A 与 $\bar{A}$

其中 $P(A)=p$, (1) 问 A 发生 2 次的概率?

(2) 问 A 至少发生 2 次的概率?

$$(1) P_2 = C_n^2 p^2 (1-p)^{n-2}$$

$$(2) P_{(n)} = 1 - P_0 - P_1 = 1 - C_n^0 p^0 (1-p)^n - C_n^1 p^1 (1-p)^{n-1}$$

例. 设甲乙两人进行乒乓球比赛, 采用五局三胜制, 各局比赛相互独立, 每局比赛中甲胜的概率为 $\frac{2}{3}$, 求甲最终获胜的概率.

① 甲连胜三局 (3局) ② 甲前 4 局 (2局) ③ 甲 5 局 (3局) 3局 (2局)

$$P_1 = C_3^3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \quad P_2 = \frac{C_2^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}{\text{前4局甲胜}} \quad P_3 = \frac{C_4^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2}{\text{前4局甲胜}} \cdot \frac{2}{3}$$

$$\therefore P = P_1 + P_2 + P_3$$

$$= \frac{8}{27} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81} = \frac{64}{81}$$

2.1 随机变量与分布函数

1. 随机变量: 设 E 为一个随机试验, Ω 是样本空间,

$e_1, e_2, \dots, e_n$ $\xrightarrow{X}$ $\begin{pmatrix} X(e_1) \\ X(e_2) \\ \vdots \\ X(e_n) \end{pmatrix}$, 则称函数 $X=X(e)$ 为随机变量, 记为 R.V. variable

如: $X = \text{"2 次射击试验中命中目标的次数"}$

则 R.V. X 的可能取值: 0, 1, 2

- ① 离散型 R.V.
- ② 连续型 R.V.
- ③ 非离散非连续型 R.V.

2. 分布函数

设 X 是一个 事件 R.V., x 为一个化简实数, 则称事件 $\{X \leq x\}$ 的概率为 R.V. X 的分布函数 记为 $F(x)$

即 $F(x) = P\{X \leq x\}$ 实数

eg $F(1) = P\{X \leq 1\}$ 随机变量

其几何意义:

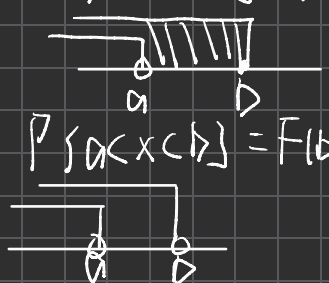
$F(x) = P\{X \leq x\}$ 表示 R.V. X 落在 x 左方区间概率



① 某点外的概率

$$\begin{aligned} P\{X < a\} &= P\{X \leq a\} - P\{X = a\} \\ &= F(a) - \lim_{x \rightarrow a^-} P\{X \leq x\} \\ &= F(a) - F(a-0) \end{aligned}$$

② 区间上的概率

$$\begin{aligned} P\{a < X \leq b\} &= F(b) - F(a) \quad \text{开区间} \\ P\{a < X < b\} &= F(b-0) - F(a) \end{aligned}$$


3. $F(x)$ 性质

① 非负性 $0 \leq F(x) \leq 1$ — 同 $f(x)$

② 规范性: $F(+\infty) = 1$ $F(-\infty) = 0$

③ 单调不减性

$$\forall x_1 < x_2 \quad F(x_2) - F(x_1) = P\{x_1 < X \leq x_2\} \geq 0$$

$$\therefore F(x_2) \geq F(x_1)$$

$\Rightarrow$ 单调不减 ($x_1 > x_2, F_{x_2} > F_{x_1}$)

④ 右连续性: $F(x)$ 为右连续函数

例. 设 R.V. X 的 $F(x) = \begin{cases} a + \frac{b}{(1+x)^2}, & x > 0 \\ c, & x \leq 0 \end{cases}$ 求 a, b, c

解 已知 $F(x)$ 为参数——用规范性
分段点处用连续性

① $F(+\infty) = 1 \therefore \lim_{x \rightarrow +\infty} a + \frac{b}{(1+x)^2} = a = 1$

② $F(-\infty) = 0 \therefore \lim_{x \rightarrow -\infty} c = c = 0$

③ $F(0+0) = F(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} a + \frac{b}{(1+x)^2} = F(0) = c = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} [a + \frac{b}{(1+x)^2}] = 0$

$\therefore a + \frac{b}{1^2} = 0$
 $c = 0 \Rightarrow b = -1$

例. 设 X 的 $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ A \sin x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$ (1) 求 A 的值 (2) 求 $P\{X < \frac{\pi}{6}\}$

(1) 连续性:

0: $\lim_{x \rightarrow 0^+} A \sin x = 0$
求不出

另外: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} A \sin x = 1$

$A = 1$

(2) $P\{\frac{\pi}{6} < X < \frac{\pi}{2}\}$

$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \sin x - F(\frac{\pi}{6})$

$= \frac{1}{2} - 0$

2.2 离散型随机变量及其分布

1. 离散型 R.V.: 当 R.V. X 的取值为有限个或可列为无限个时, 则称 X 为离散型 R.V.

eg: "掷骰子出现的点数" $X=1, 2, 3, 4, 5, 6$

"投篮直到首次命中时的投篮次数" $Y=1, 2, 3, \dots$

2. 分布律:

X	x_1	x_2	x_3	$\dots$
	p_1	p_2	p_3	

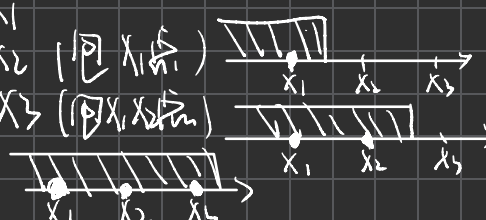
3. 分布律的性质: ① 非负性 $p_k \geq 0$
② $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$

4. 离散型 R.V. X 的分布函数

若 X 的分布律

X	x_1	x_2	x_3
	p_1	p_2	p_3

 (只有落在点上才有概率)

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \begin{cases} 0 & \text{当 } x < x_1 \\ p_1 & x_1 \leq x < x_2 \text{ (包 } x_1 \text{ 点)} \\ p_1 + p_2 & x_2 \leq x < x_3 \text{ (包 } x_1, x_2 \text{ 点)} \\ p_1 + p_2 + p_3 & x \geq x_3 \end{cases}$$


例. 10件产品中, 有2件次品, 现任取3件, 以 X 表示取到的次品数, 求 X 的概率分布.

① 先求取值 ② 再求概率

$X=0 \quad 1 \quad 2$

$$P\{X=0\} = \frac{C_8^3}{C_{10}^3} \quad P\{X=2\} = \frac{C_8^1 C_2^2}{C_{10}^3}$$

$$P\{X=1\} = \frac{C_8^2 C_2^1}{C_{10}^3}$$

例. 设一汽车在开往目的地的道路上要经过四组信号灯, 每组信号灯以概率 $\frac{1}{2}$ 允许或禁止通过, 设 X 表示汽车首次停下时, 它已通过的信号灯组数 (各组信号灯的工作是独立的), 求 X 的分布律.

$X = 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$

$$P\{X=0\} = \frac{1}{2}$$

$$P\{X=1\} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$P\{X=2\} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$P\{X=3\} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \quad (3个 \frac{1}{2} \text{ 通过}, 1个 \frac{1}{2} \text{ 没通过})$$

$$P\{X=4\} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \quad (4个 \frac{1}{2} \text{ 通过})$$

例:

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

5. 几种常见的离散型分布

(1) 0-1 分布

若 X 分布律为 $X \begin{matrix} 0 & 1 \\ P & 1-P \end{matrix}$ 则称 X 服从 0-1 分布

eg: 抛硬币

(2) 二项分布

- ① 独立重复 n 次
- ② R 有两种结果 A 与 $\bar{A}$
- ③ 各次试验中 $P = p$ 保持不变

若 X 的分布律为 $P\{X=k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, $k=0, 1, \dots, n$

则称 X 服从二项分布, 记为 $X \sim B(n, p)$

(3) 泊松分布

若 X 的分布律为 $P\{X=k\} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, $k=0, 1, 2, \dots$ ($\lambda > 0$)

则称 X 服从泊松分布, 记为 $X \sim P(\lambda)$ 或 $\pi(\lambda)$

eg: 泊松分布背景: 单位时间内交叉路口的人流量分布

(4) 超几何分布

若 X 分布律 $P\{X=k\} = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$, $k=0, 1, \dots, J$ [其中 $J = \min\{M, N\}$]

则称 X 服从超几何分布, 记为 $H(N, M, n)$

eg:

如：设一批产品共有 N 件，其中 M 件次品， $N-M$ 件正品，现从 N 件产品中任取 n 件产品（其中 $n \leq M$ ），设 X 表示其中的次品数，
 则： $P\{X=k\} = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$, $k=0, 1, \dots, n$

$$\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$$

(5) 几何分布 (不达目的，誓不罢休分布)

若 X 的分布律为 $P\{X=k\} = (1-p)^{k-1} p$, $k=1, 2, \dots$
 则称 X 服从几何分布 记为 $X \sim G(p)$

如：某人进行射击试马金，每次射击命中目标的概率为 p ，
 直到首次命中目标时停止射击，设 X 表示总的射击次数，
 则：

$$P\{X=3\} = \frac{(1-p)^2 p}{(1-p)^2 p} = (1-p)^2 p$$

例：设 $X \sim B(2, p)$, $Y \sim B(3, p)$ ，若 $P\{X \geq 1\} = \frac{5}{9}$ ，则 $P\{Y \geq 1\} = \underline{\hspace{2cm}}$

解：① $P\{X \geq 1\} = \frac{5}{9} \Rightarrow 1 - P\{X=0\} = \frac{5}{9} \Rightarrow P\{X=0\} = \frac{4}{9}$ $P\{Y \geq 1\}$

$$\text{而 } X \sim B(2, p) \Rightarrow P\{X=0\} = C_2^0 p^0 (1-p)^2 = (1-p)^2 = \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow 1-p = \frac{2}{3} \Rightarrow p = \frac{1}{3}$$

② $P\{Y \geq 1\} \stackrel{\text{求}}{=} 1 - P\{Y=0\}$ 其中 $Y \sim B(3, p)$

$$= 1 - C_3^0 p^0 (1-p)^3 = 1 - (1-p)^3 \stackrel{p=\frac{1}{3}}{=} 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{19}{27}$$

例：计算机硬件公司制造芯片，次品率为 0.1% ，各芯片成为次品相互独立，求在 1000 只产品中至少有 2 只次品的概率。

[分析]：泊松定理：若 $X \sim B(n, p)$ ，当 n 充分大， p 充分小时。

$$\text{则： } C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \text{ (其中 } \lambda = np), |n \geq 20, p \leq 0.1|$$

解：设 $X =$ “ 1000 只产品中出现的次品个数”， $p = 0.1\%$ ， $n = 1000$

$$\therefore X \sim B(1000, p) \Rightarrow P\{X \geq 2\} \stackrel{\text{求}}{=} 1 - P\{X=0\} - P\{X=1\}$$

$$\Rightarrow P\{X \geq 2\} = 1 - C_{1000}^0 p^0 (1-p)^{1000} - C_{1000}^1 p^1 (1-p)^{999}$$

$$= 1 - \frac{e^{-\lambda}}{0!} - \frac{\lambda e^{-\lambda}}{1!} \text{ 其中 } \lambda = np = 1 \quad 1 - e^{-1} - e^{-1} = 1 - 2e^{-1} \approx 0.26$$

$$1 - P\{X=0\} - P\{X=1\}$$

$$P\{X \geq 2\}$$

$$\text{当 } n \geq 20, p \leq 0.1$$

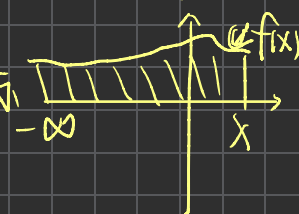
$$\text{则可写 } C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

2.3 连续型随机变量及其分布

1. 定义：设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$ ，如果有在一个函数 $f(x) \geq 0$ ，使得 $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ ，则称 X 为连续型 R.V.， $f(x)$ 为 X 的概率密度函数

注① 连续型 R.V. X 的分布函数 $F(x)$ 是连续函数 (离散型 $F(x)$ 是右连续)

② 若 $f(x)$ 在 x 点连续， $F'(x) = (\int_{-\infty}^x f(t) dt)' = f(x)$

③ $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ 表示 

2. $f(x)$ 性质

① 非负性 $f(x) \geq 0$ ($\because F(x)$ 为单调不减 $\therefore F'(x) = f(x) \geq 0$)

② 规范性 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$ ($\because F(+\infty) = 1 \therefore \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$)

③ 点外概率： $P\{X=a\} = 0$

$$\begin{aligned} & \downarrow \\ & P\{X \leq a\} - P\{X < a\} \\ &= F(a) - F(a-0) \\ & \quad \downarrow \text{又: 连续} \\ &= F(a) - F(a) = 0 \end{aligned}$$

④ 区间概率 $P\{a < X < b\} = P\{a \leq X \leq b\} = P\{a < X \leq b\} = P\{a \leq X < b\}$
(点外概率为0) $= \int_a^b f(x) dx$

例. 设连续型RV X 的 $f(x) = ae^{-|x|}$, $-\infty < x < +\infty$, (1) 求 a ; (2) 求 $F(x)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ae^{-|x|}}{1} dx = 1$$

$$\begin{aligned} \therefore & 2a \int_0^{+\infty} e^{-x} dx \\ &= 2a(-1) \left[e^{-x} \right]_0^{+\infty} \\ &= 2a = 1 \\ &a = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) f(x) &= \frac{1}{2} e^{-|x|}, x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow f(x) &= \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-x}, & x > 0 \\ \frac{1}{2} e^x, & x \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

① 当 $x < 0$ 时

$$F_x = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x \frac{1}{2} e^t dt = \frac{1}{2} e^x$$

② 当 $x > 0$ 时

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} e^x, x < 0 \\ &= \frac{1}{2} e^{-x} + 1, x > 0 \end{aligned}$$

法一: 由公式

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2} e^t dt + \int_0^x \frac{1}{2} e^{-t} dt \\ &= \left(\frac{1}{2} - 0 \right) + \left(-\frac{1}{2} e^{-x} + \frac{1}{2} \right) \\ &= -\frac{1}{2} e^{-x} + 1 \end{aligned}$$

法二: 由求导知

$$\text{法二: 利用求导知 } f(x) = F'(x) \Rightarrow F(x) =$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-x}, & x > 0 \\ \frac{1}{2} e^x, & x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} e^{-x} + C_2, & x > 0 \\ \frac{1}{2} e^x + C_1, & x \leq 0 \end{cases}$$

想: $F(x) = ?$

求常数 $F(x)$

$$\text{求 } C_1, C_2: \begin{aligned} &\text{规范性} \\ &F(-\infty) = 0 \\ &F(+\infty) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore 0 + C_2 &= 1 \Rightarrow C_2 = 1 \\ \therefore 0 + C_1 &= 0 \Rightarrow C_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} e^{-x} + 1, & x > 0 \\ \frac{1}{2} e^x, & x \leq 0 \end{cases}$$

例. 设连续型 X 的 $F(x) = a + b \arctan x$, $-\infty < x < +\infty$, (1) 求 a, b

(2) 求 $f(x)$: (a) 求 $P\{X \geq 1\}$ 把 $\geq$ 改为 $<$

$$\begin{aligned} 1) F(+\infty) &= 1 & 2) f(x) &= F'(x) \\ & & &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan x\right)' \\ & & &= \frac{1}{\pi(1+x^2)} \quad (\arctan x = \frac{1}{1+x^2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(-\infty) &= 0 \\ a - \frac{1}{2}b &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow b &= \frac{1}{\pi} \\ a &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) P\{X^2 \geq 1\} &\stackrel{\text{对称}}{=} 1 - P\{X < 1\} \\ &= 1 - P\{X \leq 1\} \\ &= 1 - \int_{-\infty}^1 \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx = 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= 1 - \frac{1}{\pi} \arctan x \Big|_0^1 \\ &= 1 - \left(\frac{1}{\pi}\right) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

3. 几个常见的连续型分布

① 均匀分布

若 X 的 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 则称 X 服从均匀分布, 记为 $X \sim U(a, b)$

$$\text{eg: } X \sim U(2, 4) \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 2 < x < 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$\text{注: 若 } X \sim U(a, b) \text{ 则 } F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b \\ 1, & x \geq b \end{cases}$$

$$\text{若 } X \sim U(a, b) \xrightarrow{\text{几何解释}} \text{则 } P\{c < X < d\} = \frac{d-c}{b-a}$$

② 指数分布

若 X 的 $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ 其中 $\lambda > 0$, 则称 X 服从 (指数分布)

记为 $X \sim e(\lambda)$

背景: 指数分布也被称为寿命分布 如电子元件

注: ① 若 $X \sim e(\lambda) \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$

② 若 $X \sim e(\lambda)$, 则 X 具有无记忆性: $P\{X > t_0 + T | X > t_0\} = P\{X > T\}$
去母也 新甲也

例. 设 $X \sim U(0, 5)$, 则关于 t 的一元二次方程 $t^2 + Xt + X + 2 = 0$ 有实根的概率为 _____.

由题: $\Delta = b^2 - 4ac$

$$= 16X^2 - 16(X+2) > 0$$

$$X^2 - (X+2) > 0$$

$$X \leq -1 \text{ 或 } X \geq 2$$

$$P(2 \leq X \leq 5) = \frac{3}{5}$$



例. 设 $X \sim e(\lambda)$, 则 $P\{2 < X < 4\} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(法1) $X \sim e(\lambda) \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$

$$P\{2 < X < 4\} = F(4) - F(2)$$

$$\xrightarrow{\text{可添项凑}} F(4) = 1 - e^{-4\lambda} - 0$$

$$(\text{连续性点}=0) = 1 - e^{-2\lambda}$$

$$\text{法2: } P\{2 < X < 4\} = \int_2^4 f(x) dx = \int_2^0 f(x) dx + \int_0^4 f(x) dx$$

$$= 0 + \int_0^4 \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$= 0 + (-1) e^{-\lambda x} \Big|_0^4 = 1 - e^{-4\lambda}$$

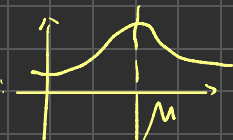
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

③ 正态分布

若 X 的 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $-\infty < x < +\infty$, 则称 X 服从正态分布, 记为

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其中 $\sigma > 0$

注: ① 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 则 $f(x)$ 的图形:



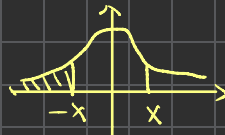
μ 位置参数, σ 形状参数
($\sigma \downarrow$ 越尖)

② 积分公式: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$ (其中: $A > 0$)

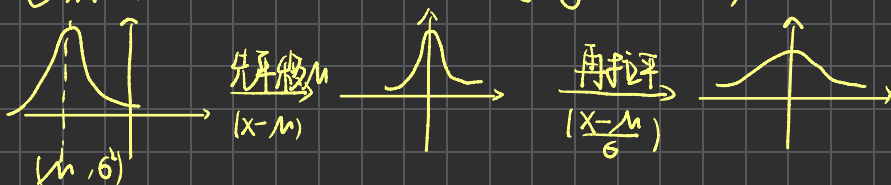
(归一化积分)

③ 标准正态分布: $\mu=0, \sigma=1$, $X \sim N(0, 1)$ 其密度为 $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

④ 若 $X \sim N(0, 1)$ 则 $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$



⑤ 标准化 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$

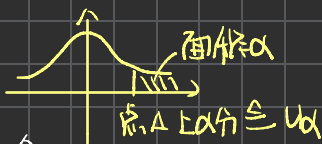


⑥ 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 则 $P\{a < X \leq b\} \xrightarrow{\text{标准化}} P\left\{\frac{a-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right\}$
 $= \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$

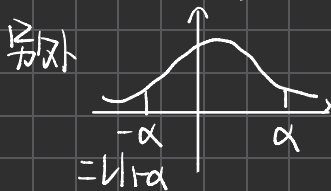
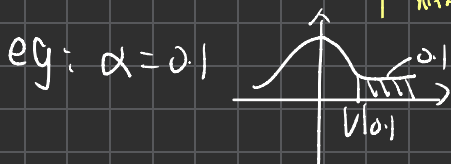
eg: $X \sim N(1, 4) \Rightarrow P\{1 < X \leq 2\} \xrightarrow{\text{标准化}} P\left\{\frac{1-1}{2} < \frac{X-1}{2} \leq \frac{2-1}{2}\right\}$
 $= \Phi\left(\frac{1}{2}\right) - \Phi(0) \quad (\text{查})$

⑦ 上 α 分位点:

设 $X \sim N(0, 1)$



则称 u_α 为 $N(0, 1)$ 的上 α 分位点



$$u_{1-\alpha} = -u_\alpha$$

$$\Phi(1) = 0.75$$

$$P\left\{\frac{Z}{2} < \frac{4.2}{6}\right\} = 0.3$$

例. 若 $X \sim N(2, \sigma^2)$, 且 $P\{2 < X < 4\} = 0.3$, 则 $P\{X < 0\} =$

$$P\{2 < X < 4\} \xrightarrow{\text{标准化}} P\left\{\frac{2-2}{\sigma} < \frac{X-2}{\sigma} < \frac{4-2}{\sigma}\right\} \quad \frac{0.3}{\sigma}$$

$$= \Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right) - \Phi(0) = 0.3$$

$$\therefore \Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right) = 0.8$$

$$P\{X < 0\} \rightarrow P\left\{\frac{X-2}{\sigma} < \frac{0-2}{\sigma}\right\}$$

$$= \Phi\left(-\frac{2}{\sigma}\right) = \frac{0.2}{0.8 \times 0.25}$$

$$[\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)]$$

2.4 随机变量函数的分布

(一) 离散型变量函数分布

2.4 随机变量函数的分布

(一) 离散型变量函数的分布

例. 设 X 的分布律: $X \begin{matrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \end{matrix}$ 求 (1) $Y=2X-1$, (2) $Y=X^2$ 的分布律.

★ "先求取值, 再求概率"

$Y=2X-1 \therefore Y: -3, -1, 1, 3$

Y	-3	-1	1	3
	0.1	0.2	0.3	0.4

Y	0	1	4
	0.2	0.4	0.4

注意这里是 1 和 -1 相加

(二) 连续型函数的密度函数

已知 $X \sim f_X(x)$, 求函数 $Y=g(X)$ 的密度函数 $f_Y(y)$

$Y=X^2, X^3, 2X+1, \dots$

利用分布函数法:

① 先找到自变量 Y 的分段点

① 将 $f_X(x)$ 中 x 分段点代 $y=g(x)$
② 有因求 $y=g(x)$ 的最值

② 再根据以上分段点, 分区间求 $F_Y(y)$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) \xrightarrow{\text{代入}} P(g(X) \leq y) = \int_{\text{区间}} f_X(x) dx$$

$$\text{eg: } P\{X^2 \leq y\} = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_X(x) dx$$

③ 求得 $F_Y(y) = f_Y(y)$

1. 全概率: $P_B = P_{A_1}B + P_{A_2}B + \dots + P_{A_n}B$
 $= P_{A_1} \cdot P_{B|A_1} + P_{A_2} \cdot P_{B|A_2} + \dots + P_{A_n} \cdot P_{B|A_n}$

2. 贝叶斯: $P_{A_i|B} = \frac{P_{A_i}B}{P_B} = \frac{P_{B|A_i} \cdot P_{A_i}}{P_{A_1}P_{B|A_1} + \dots + P_{A_n}P_{B|A_n}}$
 (全概率展开)

3. $F(x) = P\{X \leq x\}$ (离散型)
 ① $F(x) \leq 1$
 ② $F(+\infty) = 1, F(-\infty) = 0$
 ③ 连续不减
 ④ 右连续性

4. 至少发生一个: $A \cup B \cup C$

5. 泊松分布

泊松定理: 当 $n \geq 20, p < 0.1$ 时, $C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$
 $(\lambda = np)$

6. 连续型:

$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$

① $F(x)$ 为连续函数

7. 连续型 $f(x)$: ① $f(x) \geq 0$

② $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$

③ 点概率 = 0 $F(a) = P\{X \leq a\} - P\{X < a\} = 0$

$F(x)$ 也有限
 $F(+\infty) = 1, F(-\infty) = 0$

④ $P\{a < X < b\} = P\{a \leq X \leq b\}$
 连续型 $f(x)$ 中 "有" 没有结果相同 $= P\{a < X \leq b\}$
 $= P\{a \leq X < b\}$

例. 设 $X \sim f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{8}, & 0 < x < 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 求 $Y = 2X + 8$ 的密度函数 $f_Y(y)$.

① 找 Y 的分段点

0: $y = 8$ 最值: $X \in [2, 4]$ $y \in [8, 16]$

4: $y = 16$

② 分段同

1° 当 $y < 8$ 时, $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{2X + 8 \leq y\}$

$$\downarrow$$

$$P\{X \leq \frac{y-8}{2}\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\frac{y-8}{2}} f_X(x) dx = 0$$

2° $8 < y < 16$

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{2X + 8 \leq y\}$$

$$= P\{X \leq \frac{y-8}{2}\} = \int_{-\infty}^{\frac{y-8}{2}} f_X(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^0 f_X(x) dx + \int_0^{\frac{y-8}{2}} f_X(x) dx$$

$$= 0 + \frac{x^2}{16} \Big|_0^{\frac{y-8}{2}} = \frac{(y-8)^2}{64}$$

3° $y > 16$

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{X \leq \frac{y-8}{2}\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\frac{y-8}{2}} f_X(x) dx = \int_{-\infty}^0 f_X(x) dx + \int_0^4 f_X(x) dx + \int_4^{\frac{y-8}{2}} f_X(x) dx$$

$$= 0 + \frac{x^2}{16} \Big|_0^4 + 0 = 1$$

③ 将

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} \frac{y-8}{32}, & 8 < y < 16 \text{ (若被其他)} \\ 0, & y \in \text{其他} \end{cases}$$

方法二: 公式法

定理: 设 $R.V. X$ 的密度为 $f_X(x)$ ① 函数 $Y = g(X)$ 且 $y = g(x)$ 为单调函数

则 $Y = g(X)$ 的密度 $f_Y(y)$ 为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(h(y)) |h'(y)|, & \alpha < y < \beta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $h(y)$ 为 $y = g(x)$ 的反函数

α 为 $g(x)$ 最小值

β 为 $g(x)$ 最大值

例. 设 $X \sim f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{8}, & 0 < x < 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 求 $Y = 2X + 8$ 的密度函数 $f_Y(y)$.

解: 利用公式法求 $f_Y(y)$

1° 先 $y = 2X + 8$ 为单调函数

其反函数为 $x = \frac{y-8}{2} = h(y)$

2° 用公式 $f_X(h(y)) |h'(y)|$ $\alpha < y < \beta$

$$\begin{cases} \frac{(\frac{y-8}{2})}{8} \cdot \frac{1}{2}, & \alpha = 8 \quad \beta = 16 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{y-8}{32} & 8 < y < 16 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

例 设 R.V. X 在区间 $(0,1)$ 上服从均匀分布, 求 $Y = -2\ln X$ 的概率密度 $f_Y(y)$.

由题 $Y = -2\ln X \rightarrow Y' = -2/X \downarrow$ 是单调递减函数
其反函数 $X = e^{-\frac{1}{2}Y} = h(y)$

判断单调, 求反函数 $h(y)$
和 α, β

$$\sum f_Y(y) = f_X(h(y)) |h'(y)| \quad \alpha < y < \beta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}y} & y > 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

没有地方代入 $h(y)$
 $\therefore$ 取 $= 1$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}Y &= \ln x \\ e^{-\frac{1}{2}Y} &= x \end{aligned}$$

$$e^Y = e^{-2\ln x}$$

$$e^{\frac{Y}{2}} = (x^{-2})^{\frac{1}{2}} = x$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

例. 设 $X \sim U(0,2)$, 求 $Y = X^2$ 的密度 $f_Y(y)$

$Y = X^2$ 看似不单调, 但在有效区间上仍单调: 可用!!!

1. $Y = X^2$ 在 $(0,2)$ 单调, 其反函数 $X = \sqrt{y} = h(y)$ (在 $(0,2)$ 上 $\sqrt{y}$)

$$\sum f_Y(y) = \begin{cases} f_X(h(y)) |h'(y)| & \alpha < y < \beta \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} & 0 < y < 4 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

同上题, 已经是常数代入了

多维随机变量及其分布

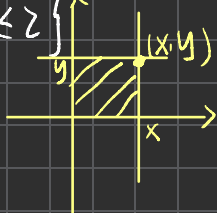
3.1 二维随机变量及其分布函数

1. 二维随机变量：设 Ω 为随机试验 E 的样本空间， X 和 Y 都是定义在 Ω 上的一维随机变量，则 (X, Y) 为二维随机变量

2. 联合分布函数：对于任意 x, y 和 $P\{X \leq x, Y \leq y\}$ 为 (X, Y) 的联合分布函数，记为 $F(x, y)$ ，即 $F(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\}$

eg: $F(1, 2) = P\{X \leq 1, Y \leq 2\}$

注 $F(x, y)$ 的几何意义：



表示落在该区域的概率

3. $F(x, y)$ 的性质

① $0 \leq F(x, y) \leq 1$

② 单调不减性，即 固定 y ，当 $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1, y) \leq F(x_2, y)$
固定 x ，当 $y_1 < y_2 \Rightarrow F(x, y_1) \leq F(x, y_2)$

③ 规范性： $F(-\infty, -\infty) = 0$ ， $F(-\infty, y) = 0$ ， $F(x, -\infty) = 0$ ， $F(+\infty, +\infty) = 1$

④ 右连续性： $F(x, y)$ 关于 x 右连续，关于 y 右连续

即 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} F(x + \Delta x, y) = F(x, y)$

$\lim_{\Delta y \rightarrow 0^+} F(x, y + \Delta y) = F(x, y)$

例：设 R.V. (X, Y) 的 $F(x, y) = A[B + \arctan \frac{x}{B}][C + \arctan \frac{y}{C}]$ ，求 A, B, C

可用规范性求参数

$F(-\infty, y) = 0$ 即 $A(B - \frac{\pi}{2})(C + \arctan \frac{y}{C}) = 0$

$F(+\infty, +\infty) = 1$ 即 $A(B + \frac{\pi}{2})(C + \frac{\pi}{2}) = 1$ 又 $B \neq 0 \therefore B = \frac{\pi}{2}$

则 $A \neq 0$

$F(x, +\infty) = 0$ 即 $A(B + \arctan \frac{x}{B})(C - \frac{\pi}{2}) = 0$

$\Rightarrow C = \frac{\pi}{2}$

代入② $\therefore A = \frac{1}{\pi^2}$

3.2 二维离散型随机变量及其分布

二维离散型随机变量：当 (X, Y) 的取值为有限个或可列无限个时称 (X, Y) 为二维离散型随机变量

如：一个箱子中有3个白球，2个红球，1个黄球，从中任取1球。

X 表示取到的白球数， Y 表示取到的红球数。

$\Rightarrow X$ 可能值为 0, 1, Y 的可能值为 0, 1

(X, Y) 的可能值 (0, 0), (0, 1), (1, 0)

联合分布律：设 (X, Y) 的可能值为 (x_i, y_j) $i=1, 2, 3, \dots$ $j=1, 2, \dots$
称 $P\{X=x_i, Y=y_j\} = p_{ij}$, $i=1, 2, \dots$ $j=1, 2, \dots$ 为 (X, Y) 联合分布律

记为

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\dots$	y_j	$\dots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$	p_{1j}	$\dots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\dots$	p_{2j}	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\dots$	p_{ij}	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$

$$[p_{ij} \geq 0, \sum_{i,j} p_{ij} = 1]$$

(表中概率合为1)

例. 1个箱子中有2个红球，4个白球，从箱中不放回地取两次球，设

$X = \begin{cases} 0, & \text{当第1次取到红球} \\ 1, & \text{当第1次取到白球} \end{cases}$, $Y = \begin{cases} 0, & \text{当第2次取到红球} \\ 1, & \text{当第2次取到白球} \end{cases}$

求 (X, Y) 的分布律。

$X \backslash Y$	0	1
0	p_{11}	p_{12}
1	p_{21}	p_{22}

$$\text{其中 } p_{11} = P\{X=0, Y=0\} = \frac{C_2^1 \cdot C_4^1}{C_6^2} = \frac{1}{15}$$

$$p_{12} = P\{X=0, Y=1\} = \frac{C_2^1 \cdot C_4^1}{C_6^2} = \frac{4}{15}$$

$$p_{21} = P\{X=1, Y=0\} = \frac{C_4^1 \cdot C_2^1}{C_6^2} = \frac{4}{15}$$

$$p_{22} = P\{X=1, Y=1\} = \frac{C_4^1 \cdot C_3^1}{C_6^2} = \frac{2}{5}$$

例: 设 $(X, Y) \sim f(x, y) = \begin{cases} kx, & 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ (1) 求 k (2) 求 $P\{X+Y \leq 1\} = F(x, y)$

已知 $f(x, y)$, 求参数, 用规范性 (2) $\iint f(x, y) dx dy$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$$

$$= \iint_D kx dx dy = \int_0^1 dx \int_x^1 kx dy$$

$$= \int_0^1 kx dx \left[y \right]_x^1$$

$$= \int_0^1 kx(1-x) dx$$

$$= k \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_0^1$$

$$= \frac{k}{2} = 1$$

$$\therefore k = 2$$

$$\iint_{x+y \leq 1} 2x dx dy$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} 2x dx \int_x^{1-x} dy$$

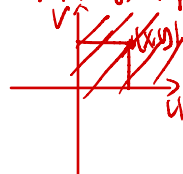
$$= \frac{1}{6}$$



例: 设 $(X, Y) \sim f(x, y) = \begin{cases} 2e^{-x-y}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 求 $F(x, y)$

分析: 已知 $f(x, y)$, 求联合 $F(x, y)$ 用 $F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv$

解: $F(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\} = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv$



只有在第一象限有概率密度 $\neq 0$

当 $x > 0, y > 0$

$$F(x, y) = \int_0^x du \int_0^y 2e^{-u-v} dv$$

$$= \int_0^x 2e^{-u} du \int_0^y e^{-v} dv$$

$$= (1 - e^{-x})(1 - e^{-y})$$

$$\text{综上 } F(x, y) = \begin{cases} (1 - e^{-x})(1 - e^{-y}), & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

3. 两个常见的二维连续型分布

① 二维均匀分布 $= \begin{cases} \frac{1}{S_D} & (x, y) \in D \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$ (S_D 是面积倒数)

$[X \sim U(a, b) \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & \text{其他} \end{cases}]$ (一维是长度倒数)

记为 $(X, Y) \sim U(D)$

若 $(X, Y) \sim U(1, 2)$ 且 $D_1 < D_2$ $P\{(X, Y) \in D_1\} = \frac{\sum D_1}{\sum D_2} \left(\frac{n \cdot \text{面}}{\text{底}} \right)$

(2) 二维正态分布 (算3)

很难, 别看了...

3.4 边缘分布

1. 边缘分布函数: 设 (X, Y) 的联合分布函数为 $F(x, y)$ 则知,

$$\textcircled{1} F_X(x) = P\{X \leq x\} = P\{X \leq x, \underbrace{\infty}_{\substack{\uparrow \\ \text{无中生有}}}\} = P\{X \leq x, \underbrace{Y < +\infty}_{\substack{\downarrow \\ -\infty < Y < +\infty}}\} = F(x, +\infty)$$

$\downarrow$ 随机变量 $\downarrow$ 自变量

为二维 R.V. (X, Y) 关于 X 的边缘分布函数

$$\textcircled{2} F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{\underbrace{\infty}_{\substack{\uparrow \\ \text{无中生有}}}, Y \leq y\} = P\{X < +\infty, Y \leq y\} = F(+\infty, y)$$

为二维 R.V. (X, Y) 关于 Y 的边缘分布函数

2. 边缘分布律

已知 (X, Y) 的联合分布律: $P\{X=x_i, Y=y_j\} = P_{ij}, i=1, 2, \dots$

$j=1, 2, \dots$ 则知 $P\{X=x_i\} = P\{X=x_i, \infty\}$

$$= P\{X=x_i, (Y=y_1 \cup Y=y_2 \cup Y=y_3 \cup \dots)\}$$

$$= P\{X=x_i, Y=y_1\} + P\{X=x_i, Y=y_2\} + \dots$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} P\{X=x_i, Y=y_j\} = \sum_{j=1}^{\infty} P_{ij}$$

例 将两封信随机地往编号为 1, 2, 3, 4 的 4 个邮箱内投放, X_1 表示第

1 个邮箱内的信的数目, X_2 表示第 2 个邮箱内信的数目. 求 (X_1, X_2) 的分布律.

$$P_{11} = P\{X_1=1, X_2=3\} = \frac{C_2^1 \cdot 1}{4} = \frac{1}{8}$$

$X_1 \backslash X_2$	1	2	0
1	P_{11}	P_{12}	P_{13}
2	P_{21}	P_{22}	P_{23}
0	P_{31}	P_{32}	P_{33}

$$P_{12} = P\{X_1=2, X_2=1\} = 0$$

$$P_{13} = P\{X_1=0, X_2=1\} = \frac{C_2^1 \cdot 2}{4 \times 4} = \frac{1}{4}$$

$$P_{21} = P\{X_1=1, X_2=2\} = 0$$

$$P_{22} = P\{X_1=2, X_2=2\} = 0$$

$$P_{23} = 0$$

$$P_{31} = P\{X_1=1, X_2=0\} = \frac{C_2^1 \cdot 2}{4 \times 4} = \frac{1}{4}$$

$$P_{32} = P\{X_1=2, X_2=0\} = \frac{1}{4}$$

$$P_{33} = P\{X_1=0, X_2=0\} = \frac{2 \times 2}{4 \times 4} = \frac{1}{4}$$

3.3 二维连续型随机变量及其分布

1. 设 (X, Y) 的联合分布函数为 $F(x, y)$, 若有在非负函数 $f(x, y) \geq 0$ 使得 $F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv$ 成立, 则称 (X, Y) 为二维连续型 RV, $f(x, y)$ 称为 (X, Y) 的联合概率密度函数

2. $f(x, y)$ 性质

① 非负性: $f(x, y) \geq 0$

② 规范性: $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$ (即 $P\{F(-\infty, \infty)\} = 1$)

③ 若 $f(x, y)$ 在点 (x, y) 处连续, 则 $\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y)$

④ 区域概率: $P\{(X, Y) \in D\} = \iint_D f(x, y) dx dy$ (若 $D = \{a < x < b\}$ 则 $\int_a^b f(x) dx$)

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	y_4	$\dots$	y_j
x_1	$x_1 y_1$	$x_1 y_2$	$x_1 y_3$	$\dots$	$\dots$	$x_1 y_j$
x_2	$x_2 y_1$	$x_2 y_2$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$x_2 y_j$
x_3	$x_3 y_1$	$x_3 y_2$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\vdots$
x_4	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_i	$x_i y_1$	$x_i y_2$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$x_i y_j$

即 X 的边缘分布律：行之和

y_j 的边缘分布律：列之和

(X 的行行相加
 y 的列列相加)

例. 设 X 与 Y 的联合分布律:

$X \backslash Y$	1	2	3	4
0	0.1	0	0	0
1	0	0.4	0.2	0.1
2	0	0	0	0.2

求 X 与 Y 的边缘分布律.

第行和

X	0	1	2
	0.1	0.4	0.2

为 (X, Y) 关于 X 边缘分布

第列和

Y	1	2	3	4
	0.1	0.4	0.2	0.2

为 (X, Y) 关于 Y 边缘分布

3. 边缘累积函数

设 (X, Y) 的联合密度函数为 $f(x, y)$ 则称:

① $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$ 为 (X, Y) 关于 X 的边缘密度函数.

② $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$ 为 (X, Y) 关于 Y 的边缘密度函数

理解: (X, Y) 关于 X 的边缘分布函数为 $F_X(x) = F(x, +\infty)$

$$\text{而 } F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv = \int_{-\infty}^x du \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v) dv$$

$$\Rightarrow F(x, +\infty) = \int_{-\infty}^x du \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v) dv = \int_{-\infty}^x g(u) du$$

$$\therefore F_X(x) = \int_{-\infty}^x g(u) du \xrightarrow{\text{求导}} f_X(x) = F'_X(x) = g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, v) dv = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$

连续型变量的门牌分布

① 均匀分布 $X \sim U(a, b)$ $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, a < x < b \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$ $F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a < x < b \\ 1 & x > b \end{cases}$

② 指数分布 $X \sim E(\lambda)$ $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$ $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$

③ 正态分布 $f(x)$ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

1. $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ ($\Phi(0)$ 也有值)

2. 标准化 $P\{x_1 < X < x_2\} \rightarrow \Phi\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right)$

3. 上 α 分位数 U_α $-\ln \alpha = U_{1-\alpha}$

$-\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

若 $f(x) = \int_0^1 \Phi(x) dx$ 则 $f(x) = \int_0^1 \Phi(x) dx$ 若 $f(x) = \int_0^1 \Phi(x) dx$ 则 $f(x) = \int_0^1 \Phi(x) dx$

定理 已知 $f_X(x)$, $Y = g(x)$ 求 $f_Y(y)$

公式法: $Y = g(x)$ 为单调函数, 则有 $f_Y(y) = \begin{cases} f_X(h(y)) \cdot |h'(y)| & \alpha < y < \beta \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

$h(y)$ 为 $Y = g(x)$ 反函数, α 为 $Y = g(x)$ 最小值, β 为最大值

二维连续型 $f(x, y)$

① $f(x, y) \geq 0$

② $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$

X 边缘分布律: 行之和 \ 联合分布律之中

Y 边缘分布律: 列之和

边缘密度函数

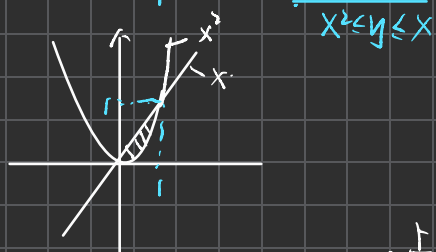
$f(x, y)$ 为 x, y 联合密度

则 $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$ 为关于 x 的

$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$ 为关于 y 的

eg: 设 X, Y 的联合密度为 $f(x, y) = \begin{cases} b & x^2 \leq y \leq x \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$ 求 $f_X(x)$ $f_Y(y)$
 已知 $f(x, y)$ 求 $f_X(x)$ 步骤:

① 先画 $y, f(x, y)$ 的非 0 区域 的草图

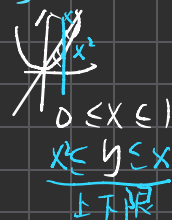


上下限不一定为 $-\infty$ 到 $+\infty$ 是阴影范围

② 再用公式 $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$ (注: 此时利用“定 x 穿 y ”方法得到 x 与 y 范围)

$$\text{自变量 } x: f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_{x^2}^x b dy & 0 \leq x \leq 1 \\ \int 0 dy = 0 & \text{其他} \end{cases}$$

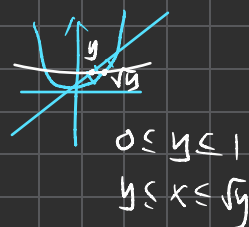
$$= \begin{cases} b(x - x^2) & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$



$Y:$ $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$ (注: 此时用“定 y 穿 x ”方法)

$$= \begin{cases} \int_y^{\sqrt{y}} b dx & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} b(\sqrt{y} - y) & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$



附: 谁为自变量就“定他穿其他”

题型：设 X, Y 联合密度函数 $f(x, y)$ ，求 $f_X(x)$ $f_Y(y)$

① 先画出 $f(x, y)$ 非0区域草图

$$② f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy =$$

非 $(-\infty, +\infty)$ 而是 $y = \dots x$ (定 x 穿 y)

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$$

非 $(-\infty, +\infty)$ 而是 $x = \dots y$ (定 y 穿 x)

条件分布：

① 固定 $Y=y_i$ ， X 在 $Y=y_i$ 下条件分布律为 $\frac{P\{X=x_i, Y=y_i\}}{P_{Y=y_i}}$

② 固定 $X=x_i$ ， Y 在 $X=x_i$ 下条件分布律为 $\frac{P\{X=x_i, Y=y_i\}}{P_{X=x_i}}$

条件分布 = $\frac{\text{联合分布}}{\text{边缘分布}}$

③ 固定 $Y=y_i$ ， X 在 $Y=y$ 下条件密度函数为 $f_X|Y(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$

④ 固定 $X=x_i$ ， Y 在 $X=x$ 下条件密度函数为 $f_Y|X(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$

题型

例 设 (X, Y) 在圆域 $x^2 + y^2 \leq 1$ 上服从均匀分布，求 $f_X(x|y)$

解 ① 由题知 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & (x, y) \in D \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

$$\begin{aligned} ② \text{求 } f_Y(y) &= f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx \quad (\text{定 } y \text{ 穿 } x) \\ &= \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{\pi} dx \quad -1 < y < 1 \\ &= \frac{2}{\pi} \sqrt{1-y^2} \end{aligned}$$

$$\text{③ 取 } Y=y, f_X|Y(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{1}{\pi}}{\frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{1-y^2}} & -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

当 $-1 < y < 1$ 时

3.5 条件分布

(回顾: 条件概率 $P(A|B) = \frac{P_{AB}}{P_B}$)

1. 条件分布律

设离散型 (X, Y) 的联合分布律为 $P\{X=x_i, Y=y_j\} = P_{ij}, i, j=1, 2, \dots$

① 固定 $Y=y_j$, 当 $P\{Y=y_j\} \neq 0$ 时, 称 $P\{X=x_i | Y=y_j\} = \frac{P\{X=x_i, Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}} = \frac{P_{ij}}{P_j}$

为 X 在 $Y=y_j$ 条件下的条件分布律

② 固定 $X=x_i$, 当 $P\{X=x_i\} \neq 0$ 时, 称 $P\{Y=y_j | X=x_i\} = \frac{P\{X=x_i, Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}} = \frac{P_{ij}}{P_i}$

为 Y 在 $X=x_i$ 条件下的条件分布律

条件分布 = $\frac{\text{联合分布}}{\text{边缘分布}}$

例. 设 X 与 Y 的联合分布律为:

$X \backslash Y$	0	1	2	3
0	0.04	0.03	0.02	0.01
1	0.06	0.01	0.008	0.002
2	0.01	0.005	0.004	0.001

求在 $Y=1$ 条件下 X 的条件分布律. $P_2 = P\{X=1 | Y=1\} = \frac{P\{X=1, Y=1\}}{P\{Y=1\}} = \frac{0.01}{0.045} = \frac{2}{9}$

先求边缘, 再来概率

解: $X: 0 \quad 1 \quad 2$

X	0	1	2
$P\{X=x_i Y=1\}$	P_1	P_2	P_3

$$P_3 = 1 - P_1 - P_2 = \frac{1}{9}$$

其中 $P_1 = P\{X=0 | Y=1\} = \frac{P\{X=0, Y=1\}}{P\{Y=1\}} = \frac{0.03}{0.03+0.01+0.005} = \frac{2}{3}$

2. 条件密度函数

设 $R.V. (X, Y)$ 的联合密度为 $f(x, y)$

① 固定 $Y=y$ 当 $f_Y(y) \neq 0$ 称 $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$ 为 X 在 $Y=y$ 条件下的条件密度

② 固定 $X=x$, 当 $f_X(x) \neq 0$ 称 $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$ 为 Y 在 $X=x$ 条件下的条件密度

注 $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$ 是 x 的一元函数
是 $f_Y(y)$ 的边缘分布函数

规范性 $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|Y}(x|y) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} dx = \frac{1}{f_Y(y)} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = 1$

例 设 (X, Y) 在圆域 $x^2 + y^2 \leq 1$ 上服从均匀分布, 求 $f_{X|Y}(x|y)$

解 ① 由题知 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & (x, y) \in D \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

② 求 $f_Y(y) = f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$ (定 y 求 x)

$$= \begin{cases} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{\pi} dx & -1 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \frac{2}{\pi} \sqrt{1-y^2} & -1 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

③ 固定 $Y=y$, $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{f(x, y)}{\frac{2}{\pi} \sqrt{1-y^2}} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{1-y^2}} & -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$
当 $-1 < y < 1$ 时

例. 设 X 在 $(0,1)$ 上服从均匀分布, 在 $X=x, (0 < x < 1)$ 的条件下, Y 在 $(x,1)$ 上服从

均匀分布, 求 Y 的密度 $f_Y(y)$.

$$f_{X|Y} = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$y = 1-x$$

在 $X=x, Y$ 在 $(x,1)$ 上均匀分布

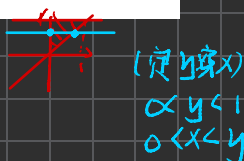
$$\Rightarrow f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & x < y < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$x f_{Y|X}(y|x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dx \text{ 而 } f_{X,Y} \text{ 未知}$$

$$\text{但 } f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}}{f_X(x)} \Rightarrow f_{X,Y} = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & 0 < x < 1, x < y < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$\therefore f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dx = \int_0^{y-1} \frac{1}{1-x} dx$$

$$= \begin{cases} -\ln(1-y) & 0 < y < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$



3.6 随机变量的独立性

(回顾: A 与 B 独立 $\Leftrightarrow P_{AB} = P_A \cdot P_B$)

1. 设 $F(x,y)$ 为 (X,Y) 的联合分布函数, $F_X(x), F_Y(y)$ 分别为 X 与 Y 的边缘分布函数, 若 $F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$ 则 $R.V. X$ 与 Y 相互独立

联合函数 边缘函数

2. 当 (X,Y) 为离散型 $R.V.$ 时, X 与 Y 独立 $\Leftrightarrow P\{X=x_i, Y=y_j\}$

$$P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\} \quad i, j = 1, 2, \dots$$

边缘概率

联合概率

3. 当 (X,Y) 为连续型 $R.V.$ 时, X 与 Y 独立 $\Leftrightarrow f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$

联合密度 边缘密度

设 (X, Y) 分布律为

	1	2	3
0	0.04	0.06	0.1
1	0.16	0.24	0.4

问 X 与 Y 是否相互独立.

由题设 $P\{X=0, Y=1\} = P\{X=0\}P\{Y=1\}$ 联合概率 (求 = 边缘概率)

$P\{X=0, Y=2\} = P\{X=0\}P\{Y=2\}$

$0.06 \quad 0.2 \quad 0.2$

$0.04 \quad 0.2 \quad 0.3$

$\therefore P\{X=x_i, Y=y_j\} = P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\} \quad \forall i, j \quad \therefore X$ 与 Y 独立

小结: X 与 Y 独立 $\Leftrightarrow X$ 与 Y 的联合分布律每行均成比例

例. 设 (X, Y) 的密度函数 $f(x, y) = \begin{cases} 2e^{-2x-y}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 问 X 与 Y 独立吗?

证: (求 $f_X(x) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$)

$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$ (对 x 求 y)

$\int_0^{+\infty} 2e^{-2x-y} dy = 2e^{-2x} \int_0^{+\infty} e^{-y} dy = 2e^{-2x}, x > 0$

$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$ (对 y 求 x)

$= \int_0^{+\infty} 2e^{-2x-y} dx, y > 0 = 2e^{-y} \int_0^{+\infty} e^{-2x} dx = \frac{1}{2} \cdot 2e^{-y} = e^{-y}, y > 0$

其他

$\therefore f_X(x)f_Y(y) = \begin{cases} 2e^{-2x} \cdot e^{-y} & x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} = f(x, y) \quad \therefore \text{独立}$

3.7 两个随机变量函数的分布

1. 两个离散型R.V.函数的分布

例: 设 (X, Y) 的分布律为

$X \backslash Y$	1	2	3
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
2	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{4}$

求 $Z = X + Y$ 的分布律

分布律: 先求取值, 再求概率 (先取值, 再求概率)

解: $Z = X + Y = 2, 3, 4, 5$

$$P\{Z=2\} = P\{X=1, Y=1\} = \frac{1}{4}$$

$$P\{Z=3\} = P\{X=1, Y=2\} + P\{X=2, Y=1\} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$$P\{Z=4\} = P\{X=2, Y=2\} + P\{X=1, Y=3\} = 0 + \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

$$P\{Z=5\} = P\{X=2, Y=3\} = \frac{1}{4}$$

Z	2	3	4	5
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

2. 两个连续型R.V.函数的分布

设 (X, Y) 的联合密度函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-y}, & 0 < x < 1, y > 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

(分析: 已知 $f(x, y)$ 求 $Z = g(X, Y)$ 的密度 $f_Z(z)$ —— **分布函数法** 涉及 $f_Z(z)$)

先求 $F_Z(z)$ 再求 $f_Z(z)$

解: 已知 $f_X(x)$, $Y = g(X)$ 求 $f_Y(y)$

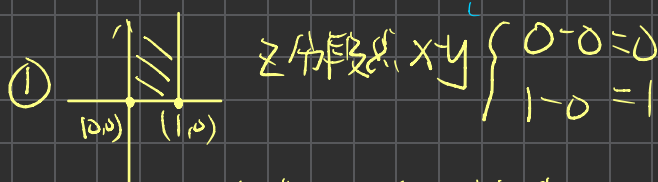
2. 两个连续型 R.V 函数的分布
 设 (X, Y) 的联合密度函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, & 0 < x < 1, y > 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$ 求 $Z = X - Y$ 的密度 $f_Z(z)$
 (分析: 已知 $f(x, y)$ 求 $Z = g(x, y)$ 的密度 $f_Z(z)$ —— 分布函数法)

先求 $F_Z(z)$ 求导即得 $f_Z(z)$

第1步: 先找自变量 z 的分段点: (把非零区域 D 的迎角点代入 $z = g(x, y)$ 得 z 值)

第2步: 依据以上分段点, 分区间求 $F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{g(x, y) \leq z\} = \iint_{g(x, y) \leq z} f(x, y) dx dy$

第3步: 求 $F'_Z(z)$ 得 $f_Z(z)$



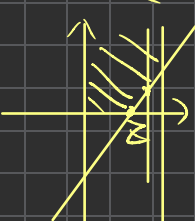
两个点: 分三种情况

② 1. 当 $z < 0$, $F_Z(z) = P\{Z \leq z\} \xrightarrow{\text{代入}} P\{X - Y \leq z\} = \iint_{X - Y \leq z} f(x, y) dx dy = \iint_{X - Y \leq z \cap D} \frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}} dx dy$

 $y = x - z$

$$= \int_0^1 dx \int_{x-z}^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}} dy = z(1 - e^{-\frac{1}{2}}) e^{\frac{z}{2}}$$

2. 当 $0 \leq z < 1$, $F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = \iint_{X - Y \leq z} \frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}} dx dy$

 $y = x - z$

$$= 1 - \int_z^1 dx \int_0^{x-z} \frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}} dy$$

$$= S_{\text{全}} - S_{\text{阴影}} = \text{角空}$$

$$= 1 - \int_z^1 dx \int_0^{x-z} \frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}} dy$$

$$= z + z - 2e^{-\frac{z}{2}}$$

(对 dy 就定 x 穿 y 用 x 表示 y)

3. 当 $z \geq 1$  $F_Z(z) = 1$

题型

例. 设 $X \in (0,1)$ 上服从均匀分布, 在 $X=x, (0 < x < 1)$ 的条件下, Y 在 $(x,1)$ 上服从

均匀分布, 求 Y 的密度 $f_Y(y)$.

$$f_{X|Y} = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

在 $X=x, Y$ 在 $(x,1)$ 上均匀分布

$$\Rightarrow f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & x < y < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

又 $f_{X,Y} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dx$ 而 $f_{X,Y}(x,y)$ 未知

$$\text{但 } f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} \Rightarrow f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & 0 < x < 1, x < y < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$\therefore f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dx = \int_0^y \frac{1}{1-x} dx \quad (定积分) \\ = \begin{cases} -\ln(1-y) & 0 < y < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

已知 $f_{X,Y}(x,y)$ 求 $f_X(x), f_Y(y)$

- 若已知 $f_{X|Y}(x|y)$ 用 $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$
- 若未知, 用 $\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy, f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy$

例 $D \rightarrow (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \rightarrow \begin{matrix} x = \\ y = \end{matrix}$

题型

已知 $f_{X,Y}(x,y)$, $Z = g(X,Y)$ 求 $F_Z(z)$

① 先代入 X, Y 的边界点, 找出 Z 的边界点

② 对 Z 的边界讨论 求 $F_Z(z) = P\{Z \leq g(X,Y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I_{\{Z \leq g(X,Y)\}} f_{X,Y}(x,y) dx dy$

③ 对 $F_Z(z)$ 求导得 $f_Z(z)$

$$\text{求 } f_{X,Y} \cap g_{X,Y}$$

卷积公式: $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2), X, Y$ 独立
 $Z = aX + bY$ 则 $Z \sim N(a\mu_1 + b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2)$

$$P\{\max(X,Y) \leq z\} = P\{X \leq z\} P\{Y \leq z\}$$

$$P\{\min(X,Y) \leq z\} = 1 - P\{\min(X,Y) > z\} = 1 - (1 - P\{X \leq z\})(1 - P\{Y \leq z\})$$

$$\therefore F_Z(z) = \begin{cases} z(1-e^{-\frac{1}{2}z})e^{\frac{z}{2}}, & z < 0 \\ z + 2 - ze^{\frac{z}{2}}, & 0 \leq z < 1 \\ 1, & z \geq 1 \end{cases}$$

(3) 求 $F_Z(z)$

$$f_Z(z) = F'_Z(z) = \begin{cases} (1-e^{-\frac{1}{2}z})e^{\frac{z}{2}}, & z < 0 \\ 1-e^{\frac{z}{2}}, & 0 \leq z < 1 \\ 0, & z \geq 1 \end{cases}$$

3. 利用卷积公式求 $Z = X + Y$ 的密度

设 $(X, Y) \sim f(x, y)$, X 与 Y 独立, 则 $Z = X + Y$ 的密度

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \cdot f_Y(z-x) dx$$

例 设 $X \sim N(0, 1)$, $Y \sim N(0, 1)$, 且 X 与 Y 独立, 证明: $Z = X + Y \sim N(0, 2)$

标准正态
由题 $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $-\infty < x < +\infty$ $f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$, $-\infty < y < +\infty$

利用卷积公式 $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-x)^2}{2}} dx$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\frac{z}{2})^2} dx$$

$$\xrightarrow{\text{令 } x-\frac{z}{2}=t} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4}}$$

$$\text{由积分公式 } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad \therefore \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$$

$$e^{-x^2} = -\frac{e^{-x^2}}{2x} \quad \therefore \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = 2$$

推广: $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, X 与 Y 独立
 $\Rightarrow (X+Y) \sim N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$

4. 两个变量最值函数的分布

设 X, Y 与 Y 独立, X 的分布函数为 $F_X(x)$, Y 的分布函数为 $F_Y(y)$

1) $Z = \max\{X, Y\}$ 的分布函数

$$F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{\max(X, Y) \leq z\} \stackrel{\text{等价于}}{=} P\{X \leq z, Y \leq z\} \\ \stackrel{\text{独立}}{=} P\{X \leq z\} P\{Y \leq z\} \\ = F_X(z) F_Y(z)$$

2) $Z = \min\{X, Y\}$ 的分布函数

$$F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{\min(X, Y) \leq z\} \stackrel{\text{对立}}{=} 1 - P\{\min(X, Y) > z\} \\ \stackrel{\text{等价于}}{=} 1 - P\{X > z, Y > z\} \\ = 1 - (1 - P\{X \leq z\})(1 - P\{Y \leq z\}) \\ = 1 - (1 - F_X(z))(1 - F_Y(z))$$

例. 设 r.v. X 与 Y 独立, 且均服从 $(0, 3)$ 上的均匀分布, 则 $P\{\max(X, Y) \leq 1\} = \underline{\quad}$

$$P\{\min(X, Y) \leq 1\} = \underline{\quad}$$

$$F_X(1) P\{X \leq 1\} P\{Y \leq 1\}$$

$$(1) P\{X \leq 1, Y \leq 1\} = P\{X \leq 1\} P\{Y \leq 1\} \quad \begin{array}{c} \text{0} \quad 1 \quad 3 \\ \text{---} \end{array} \\ = \frac{1-0}{3-0} \cdot \frac{1-0}{3-0} = \frac{1}{9} \quad (\text{均匀分布})$$

$$(2) 1 - P\{X > 1, Y > 1\} = 1 - (1 - P\{X \leq 1\})(1 - P\{Y \leq 1\}) \\ = 1 - (1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{3}) \\ = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

$$\begin{aligned} & 1 - P\{\min(X, Y) > z\} \\ & 1 - P\{X > z, Y > z\} \\ & 1 - (1 - P) \end{aligned}$$

4.1 数学期望

1. 离散型 R.V 的数学期望

(1) 设 R.V X 的分布律:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_k	$\dots$
	p_1	p_2	$\dots$	p_k	$\dots$

 则称 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k = x_1 p_1 + \dots + x_k p_k$ 为 X 的数学期望 (均值)

(注: 离散期望 = 取值乘概率再求和)

(2) 若 $Y = g(X)$, 则 $E[g(X)] = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k) p_k$ 为 $Y = g(X)$ 的数学期望

(3) 设

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\dots$	y_j	$\dots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$	p_{1j}	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\dots$	p_{2j}	$\dots$

 $Z = g(X, Y)$ 则 $E[g(X, Y)] = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} g(x_i, y_j) \cdot p_{ij}$ 为 $g(X, Y)$ 的数学期望

例. 设 X 的分布律为:

X	0	1	2	3
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

 求 $E(X)$, $E(X^2)$

解: $E(X) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \times 2 + \frac{1}{8} \times 3 = \frac{7}{8}$

$$E(X^2) = 0^2 \times \frac{1}{2} + 1^2 \times \frac{1}{4} + 2^2 \times \frac{1}{8} + 3^2 \times \frac{1}{8} = \frac{15}{8}$$

例. 设 (X, Y) 的分布律为:

$X \backslash Y$	-1	0	1
1	0.2	0.1	0.1
2	0.1	0	0.1
3	0	0.3	0.1

 求 $E(X)$, $E(Y)$, $E(\frac{Y}{X})$

(1)

X	1	2	3
	0.4	0.2	0.4

 $\therefore E(X) = 1 \times 0.4 + 2 \times 0.2 + 3 \times 0.4 = 2$

(2)

Y	-1	0	1
	0.3	0.4	0.3

 $E(Y) = 0$

(3) $E(\frac{Y}{X}) = \frac{-1}{1} \times 0.2 + \frac{0}{1} \times 0.1 + \frac{1}{1} \times 0.1 + \frac{-1}{2} \times 0.1 + \frac{0}{2} \times 0.1 + \frac{1}{2} \times 0.1 + \frac{0}{3} \times 0 + \frac{0.3}{3} \times 0.1 = -\frac{1}{15}$

2. 连续型R.V.的数学期望

(1) 设R.V. X 的密度函数为 $f_X(x)$, 则和 $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$ 为 X 的数学期望
 注: 连续期望 = 取值乘密度再积分

(2) 若 $Y = g(X)$, $X \sim f_X(x)$ 则 $E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx$ 为 $Y = g(X)$ 的数学期望

(3) 若 $Z = g(X, Y)$ 且 $(X, Y) \sim f_{(X, Y)}$ 则 $E(g(X, Y)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f_{(X, Y)}(x, y) dx dy$
 为 $Z = g(X, Y)$ 的数学期望

例: 设 $X \sim U(0, \pi)$, 求 $E(X)$, $E(\sin X)$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & 0 < x < \pi \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_{-\infty}^0 x f_X(x) dx + \int_0^{\pi} x f_X(x) dx + \int_{\pi}^{+\infty} x f_X(x) dx$$

$$= 0 + \int_0^{\pi} \frac{1}{\pi} x dx + 0 = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$(2) E(\sin X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x f_X(x) dx = 0 + \int_0^{\pi} \sin x \cdot \frac{1}{\pi} dx + 0$$

$$= \frac{1}{\pi} [-\cos x]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

注: 取值的密度

例: 设 $(X, Y) \sim f(x, y) = \begin{cases} 12y^2, & 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 求 $E(X|Y)$, $E(X)$

(1) $E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f(x, y) dx dy$ (因为 $g(x, y) = xy$)

$$= 0 + \int_0^1 x dx \int_0^x y \cdot 12y^2 dy + 0$$

$$= 12 \int_0^1 \frac{x^4}{4} \cdot x dx = 12 \cdot \frac{x^6}{6} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

(2) $E(X) = E(XY) = \int_0^1 x dx \int_0^x y f(x, y) dy$

此时给的是联合非边缘
 不能直接 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$

$$= \int_0^1 x \cdot 4x^3 dx$$

$$= \frac{4}{5} x^5 \Big|_0^1 = \frac{4}{5}$$

3. 期望的性质

① 设 C 是常数, $E(C) = C$

② $E(C \cdot X) = C E(X)$

③ $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

④ 若 X 与 Y 独立, 则 $E(XY) = E(X)E(Y)$

4. 方差

1. 设 X 为 $R.V.$, 若 $E[(X-E(X))^2]$ 存在, 则称其为方差, 记为 $D(X)$, 即 $D(X) = E[X - E(X)]^2$

注: ① $D(X)$: 表示 X 与 $E(X)$ 偏离的程度

② $D(X) \geq 0$

2. 计算公式

$$D(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

求解: $D(X) = E[(X - E(X))^2]$
 $= E[X^2 - 2E(X)X + E(X)^2]$
 $= E(X^2) - E^2(X)$

方差方差, 平方之差

方差公式反用 $E(X^2) = D(X) + E^2(X)$

例: 设 $X \sim f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 且 $E(X) = 0.5$, $D(X) = \frac{9}{4} + \frac{1}{3} + \frac{c}{2} = 0.5$

① $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^1 (ax^2 + bx + c)x dx = \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2} = 0.5$

② $D(X) = E(X^2) - E^2(X) \Rightarrow E(X^2) = D(X) + E^2(X) = 0.4$
 $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^1 x^2 (ax^2 + bx + c) dx = \frac{a}{5} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2} = 0.4$

③ 归范性: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 (ax^2 + bx + c) dx = 1 \Rightarrow \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = 1$

解法①②③

$\Rightarrow a = 1.2$

$b = -1.2$

$c = 3$

3. 方差的性质

① 设 C 为常数, $D(C) = 0$

$$\textcircled{2} D(CX) = C^2 D(X) \quad E(X) = E^2(X)$$

$$\textcircled{3} D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2[E(XY) - E(X)E(Y)]$$

若 X 与 Y 独立, 则 $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$

例: 设 X_1, X_2, X_3 相互独立, $D(X_1) = 3, D(X_2) = 4, D(X_3) = 3$,

求 $D(X_1 - 2X_2 + 3X_3)$

$$\begin{aligned} \text{解: } D(X_1 - 2X_2 + 3X_3) &= D(X_1) + D(-2X_2) + D(3X_3) \\ &= D(X_1) + 4D(X_2) + 9D(X_3) \\ &= 46. \end{aligned}$$

4.3 常见分布期望与方差

1. 0-1 分布

若 X 服从 0-1 分布 $\begin{array}{c|cc} X & 0 & 1 \\ \hline & 1-p & p \end{array}$ 则 $E(X) = p, D(X) = p(1-p)$

$$\text{解释: } E(X) = 0(1-p) + 1 \cdot p = p$$

$$E(X^2) = 0^2(1-p) + 1^2 \cdot p = p$$

$$\Rightarrow D(X) = E(X^2) - E^2(X) = p - p^2 = p(1-p)$$

2. 二项分布

若 $X \sim B(n, p)$, 则 $E(X) = np, D(X) = np(1-p)$

解释: 若 $X \sim B(n, p)$, X 的含义: "n 次伯努利试验中 A 发生的总次数"
其中 $P(A) = p$, 引入 $X_i =$ "第 i 次伯努利试验中 A 发生次数"

3. 泊松分布

若 $X \sim P(\lambda)$, 即 $P\{X=k\} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, k=0, 1, \dots$ 则 $E(X) = \lambda, D(X) = \lambda$

解释: $E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k P\{X=k\} = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$
 无穷级数

4. 均匀分布

设 $X \sim U(a, b)$ 则 $E(X) = \frac{a+b}{2}$ $D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

5. 指数分布

设 $X \sim e(\lambda)$ 则 $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ $D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

6. 正态分布

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 则 $E(X) = \mu, D(X) = \sigma^2$

$f(x) \propto e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$

例. 设 $X \sim e(1)$, 则 $E(X + e^{-2X}) = \underline{\hspace{2cm}}$
 指数分布

$E(X + e^{-2X}) = E(X) + E(e^{-2X})$
 $= 1 +$

$E(X) = \frac{1}{\lambda}$ $D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
 $E(X)$

即 $f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow E(e^{-2X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x} f_X(x) dx$
 $= \int_0^{+\infty} e^{-2x} \cdot e^{-x} dx$
 $= \int_0^{+\infty} e^{-3x} dx = \frac{1}{3}$

例. 设 X 表示 10 次独立重复射击命中目标的次数, 每次命中目标的概率为 0.4, 则 $E(X) = \underline{\hspace{2cm}}$

$\therefore E(X) = DX + E^2(X)$

又 $X \sim B(10, 0.4)$

$= 10 \times 0.4 \times 0.6 + 10 \times 0.4$
 $= 18.4$

$(10, 0.4)$
 $E(X) = DX + E^2(X)$
 $= 10 \times 0.4 \times 0.6 + 10 \times 0.4$

4.4 协方差与相关系数

1. 协方差: 设 (X, Y) 为二维 $R.V.$, 称 $E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$ 为 X 与 Y 的协方差, 记为 $\text{COV}(X, Y)$ 即 $\text{COV}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$

注 ① $\text{COV}(X, X) = D(X)$

② 计算公式: $\text{COV}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

③ $D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2\text{COV}(X, Y)$

(联系前面 $D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2[E(XY) - E(X)E(Y)]$)

2. 协方差的性质

① $\text{COV}(X, Y) = \text{COV}(Y, X)$ $E(XY) - E(X)E(Y)$
乘积的期望 - 期望的乘积

② $\text{COV}(aX, bY) = ab \text{COV}(X, Y)$

③ $\text{COV}(X+Y, Z) = \text{COV}(X, Z) + \text{COV}(Y, Z)$

④ 若 X 与 Y 独立, 则 $\text{COV}(X, Y) = 0$; $\text{COV}(X, C) = 0$

3. 相关系数

称 $\rho_{XY} = \frac{\text{COV}(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$ 为 X 与 Y 的相关系数.

如 $Y = X \Rightarrow \rho_{XY} = \frac{\text{COV}(X, X)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(X)}} = \frac{E(X^2) - E^2(X)}{D(X)} = \frac{D(X)}{D(X)} = 1$

$Y = 2X \Rightarrow \rho_{XY} = \frac{\text{COV}(X, 2X)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{4D(X)}} = \frac{2D(X)}{2D(X)} = 1$

↑ D 为方差

注: ρ_{XY} 刻画了 X 与 Y 的线性相关程度

4. ρ_{xy} 的性质

- ① $-1 \leq \rho_{xy} \leq 1$
- ② $\rho_{xy} = 0 \Leftrightarrow$ 称 X 与 Y 不相关
- ③ $\begin{cases} \rho_{xy} = 1 \Leftrightarrow \text{称 } X \text{ 与 } Y \text{ 正相关 (即 } Y = ax + b, a > 0) \\ \rho_{xy} = -1 \Leftrightarrow \text{称 } X \text{ 与 } Y \text{ 负相关 (即 } Y = ax + b, a < 0) \end{cases}$

注: X 与 Y 独立 $\Rightarrow X$ 与 Y 不相关 ($\rho_{xy} = 0$)
(独立也没有) (不存在线性关系)

例: 设 $X \sim \begin{matrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{matrix}$, $Y \sim \begin{matrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{matrix}$, 且 $P\{X^2=Y^2\}=1$, (1) 求 (X,Y) 的联合概率分布

$P\{X=Y\}=1 \xrightarrow{\text{题设}} P\{X \neq Y\}=0 \Rightarrow P\{X=0, Y=1\} + P\{X=1, Y=0\} = 0$

又概率和为 1: 三个都为 0

$X \backslash Y$	-1	0	1
0	0	$\frac{1}{3}$	0
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

(2) 求 ρ_{xy}

$$\rho_{xy} = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D_X} \sqrt{D_Y}} = \frac{E(XY) - E_X E_Y}{\sqrt{D_X} \sqrt{D_Y}} = \frac{0 - 0}{\sqrt{\frac{1}{3}} \sqrt{\frac{1}{3}}} = 0$$

例: 设 $X \sim N(0,1)$, $Y=X^2$, 求 ρ_{xy}

由 $X \sim N(0,1)$ 其密度 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad -\infty < x < +\infty$

$\Rightarrow E(X) = 0$

$$\rho_{xy} = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D_X} \sqrt{D_Y}} = \frac{E(XY) - E_X E_Y}{\sqrt{D_X} \sqrt{D_Y}} = \frac{0 - 0 \cdot E_Y}{\sqrt{D_X} \sqrt{D_Y}} = 0$$

又 $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \varphi(x) dx = 0$

连续型函数的数学期望 $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ ($Eg(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$)
 离散型 = 取值 $\times$ 概率 $Eg(X, Y) = \iint g(x, y) f(x, y)$

$$D(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2(E(X \cdot Y) - E(X)E(Y))$$

若 X, Y 独立: $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$

协方差 $Cov(X, Y) = E(XY) - E_X E_Y$, $Cov(X, X) = D(X)$

$$Cov(aX, bY) = ab Cov(X, Y)$$

$$Cov(X+Y, Z) = Cov(X, Z) + Cov(Y, Z)$$

相关系数 $\rho_{XY} = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{D_X} \sqrt{D_Y}}$

性质: $-1 \leq \rho \leq 1$

若 X, Y 独立则 $\rho_{XY} = 0$

例: 设 $X \sim \begin{matrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{matrix}$, $Y \sim \begin{matrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{matrix}$, 且 $P\{X^2=Y^2\}=1$, (1) 求 (X, Y) 的联合分布

$P\{X^2=Y^2\}=1 \xrightarrow{\text{联想}} P\{X^2 \neq Y^2\}=0 \Rightarrow P\{X=0, Y=1\} + P\{X=0, Y=-1\} + P\{X=1, Y=0\} = 0$

又概率非负: 三个都为 0

$X \backslash Y$	-1	0	1
0	0	$\frac{1}{3}$	0
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

(2) $\rho_{XY} = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{D_X} \sqrt{D_Y}} = \frac{E(XY) - E_X E_Y}{\sqrt{D_X} \sqrt{D_Y}} = \frac{0 - 0}{\sqrt{D_X} \sqrt{D_Y}} = 0$

切比雪夫不等式: $P\{|X - E(X)| \geq \epsilon\} \leq \frac{D(X)}{\epsilon^2}$
 $\Rightarrow P\{|X - E(X)| \leq \epsilon\} \geq 1 - \frac{D(X)}{\epsilon^2}$

5.1 大数定律

1. 切比雪夫不等式

设 R.V. X 的数学期望为 $E(X)$, 方差为 $D(X)$ 则对于任意正数 ε 有: $P\{|X-E(X)| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$ (上限)

注: 切比雪夫不等式表明: $D(X)$ 越小, 事件 $\{|X-E(X)| \geq \varepsilon\}$ 发生的概率越小, 即事件 $\{|X-E(X)| < \varepsilon\}$ 发生概率越大, 进而 X 取值越集中在 $E(X)$ 附近

等价切比雪夫不等式: $P\{|X-E(X)| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$

口诀: "大小不一", "小大有一"

例. 设 X 的 $E(X)=50$, $D(X)=25$, 则 $P\{40 < X < 60\} \geq$ _____

$P\{40 < X < 60\} \stackrel{\text{同减50}}{=} P\{-10 < X-E(X) < 10\}$ 按理用 $\int_{-10}^{10} f(x)dx$ 但: 随
 $\stackrel{||}{=} P\{|X-E(X)| < 10\}$ 用估计切比雪夫
 $\stackrel{\text{上}}{=} P\{|X-E(X)| < \frac{10}{\varepsilon}\}$

$$\therefore P\{|X-E(X)| < 10\} \geq 1 - \frac{D(X)}{10^2} = 1 - \frac{25}{100} = \frac{3}{4}$$

例. 设 $E(X)=2$, $E(Y)=2$, $D(X)=1$, $D(Y)=4$, $\rho_{XY}=-\frac{1}{2}$.

试(估计) $P\{|X+Y| \geq 6\}$.

(按切比雪夫)

$$P\{|X+Y-E(X+Y)| \geq 6\} \leq \frac{D(X+Y)}{6^2}$$

$$\times E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 0$$

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$$

$$= 1 + 4 - 2 = 3$$

$$\times \rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \text{Cov}(X, Y) = -1$$

$$\text{代入 } \frac{D(X+Y)}{6^2} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

框框老师

例. 设 X 的 $E(X)=50$, $D(X)=25$, 则 $P\{40 < X < 60\} \geq$ _____

$P\{40 < X < 60\} \geq P\{40 < X - E(X) < 60\}$

$P\{|X - E(X)| < 10\}$

$\therefore P\{|X - E(X)| < 10\} \geq 1 - \frac{D(X)}{10^2} = 1 - \frac{25}{100} = \frac{3}{4}$

按理用

$\int_{40}^{60} f(x) dx$ 但: 没有
用估计一切比雪夫

例. 设 $E(X)=-2$, $E(Y)=2$, $D(X)=1$, $D(Y)=4$, $\rho_{XY}=-\frac{1}{2}$

试估计 $P\{|X+Y| \geq 6\}$.

按雪夫

$P\{|X+Y - E(X+Y)| \geq 6\} \leq \frac{D(X+Y)}{6^2}$

$E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 0$

$D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$

$= 1 + 4 - 2 = 3$

$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)} \sqrt{D(Y)}} = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \text{Cov}(X, Y) = -1$

代入 $\frac{D(X+Y)}{6^2} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

框框老师

切比雪夫大数定理 $[E(X), D(X)]$ 存在

$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|X - E(X)| < \varepsilon\} = 1$

辛钦大数定理 $[E(X)]$ 存在, $[D(X)]$ 不要求

$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|X - E(X)| < \varepsilon\} = 1$

林德伯格中心定理

n 充分大时

$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \sim N(0, 1)$

拉普拉斯中心定理 (二项分布)

也 $\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \sim N(0, 1)$

$(\mu = np, \sigma^2 = np(1-p))$

2. 切比雪夫大数定律

设 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 是相互独立的随机变量序列, 且 $E(X_i), D(X_i)$ 均存在, 且 $D(X_i) \leq C, i=1, 2, \dots$. 记 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, 则对于任意正数 ε 有: $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\bar{X} - E(\bar{X})| < \varepsilon\} = 1 \Leftrightarrow \bar{X}$ 依概率收敛到 $E(\bar{X})$ 即 $\bar{X} \xrightarrow{P} E(\bar{X})$
说明偏离很小

证明: 切比雪夫不等式: $P\{|\bar{X} - E(\bar{X})| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D(\bar{X})}{\varepsilon^2}$
其中 $D(\bar{X}) = D(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i) = \frac{1}{n^2} D(\sum_{i=1}^n X_i) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D(X_i) \leq \frac{1}{n^2} \cdot nC = \frac{C}{n}$
 $\therefore P\{|\bar{X} - E(\bar{X})| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D(\bar{X})}{\varepsilon^2} \geq 1 - \frac{C}{\varepsilon^2 n} \xrightarrow{\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}} 1$
 $\therefore P\{|\bar{X} - E(\bar{X})| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D(\bar{X})}{\varepsilon^2} \geq 1$
 $P\{\bar{X} \xrightarrow{P} E(\bar{X})\}$

3. 伯努利大数定律

设 nA 为 n 次独立重复试验中事件 A 发生的次数, $P_A = P$
则对于任意正数 ε , 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\frac{nA}{n} - P| < \varepsilon\} = 1$ (即 $\frac{nA}{n} \xrightarrow{P} P$)

PS: 大数定律都有 $n \rightarrow \infty$, 切比雪夫中, $E(X_i), D(X_i)$ 存在

4. 辛钦大数定律 (此大数定律不需要 $D(X_i)$ 存在)

设随机变量序列 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 相互独立, 且服从同一分布 $E(X_i)$ 存在, 则对于任意正数 ε , 有:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\bar{X} - E(\bar{X})| < \varepsilon\} = 1, \text{ 即 } \bar{X} \xrightarrow{P} E(\bar{X})$$

1.2 中心极限定理

基本思想: 在一定条件下, 即使原来并不服从正态分布的一些独立随机变量的和的分布, 当随机变量的个数充分大时, 也近似服从正态分布

① 独立同分布的中心极限定理 (列维—林德伯格)

设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立, 服从同一分布, 且具有相同的数学期望与方差, 记 $E(X_i) = \mu$, $D(X_i) = \sigma^2$, $i=1, 2, \dots$

则: 当 n 充分大时 $\sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{\text{近似}} N(\text{期望}, \text{方差})$

$$= N(E(\sum_{i=1}^n X_i), D(\sum_{i=1}^n X_i))$$

$$= N(n\mu, n\sigma^2)$$

↓ 标准化

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow{\text{近似}} N(0, 1)$$

② 棣莫弗——拉普拉斯中心极限定理

设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 相互独立, 且都服从 (0-1) 分布 $\frac{0}{1-p} \frac{1}{p}$, 其中 $i=1, 2, \dots$ 则: 当 n 充分大时

$$\sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{\text{近似}} N(\text{期望}, \text{方差})$$

$$= N(E(\sum_{i=1}^n X_i), D(\sum_{i=1}^n X_i))$$

$$= N(n\mu, n\sigma^2)$$

↓
 p

↓
 $p(1-p)$

↓ 标准化

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \sim N(0, 1)$$

例. 用机器包装味精, 每袋的净重是随机变量, 期望为 $100g$, 方差为 $10g$, 一箱中装 200 袋味精, 求一箱味精的净重大于 $20500g$ 的概率.

解: 设每袋味精重量为 $X_i, i=1, 2, \dots, 200$

$$P\{m > 20500\} = P\left\{\sum_{i=1}^{200} X_i > 20500\right\}$$

由中心定理 $\sum_{i=1}^{200} X_i \sim N(200\mu, 200\sigma^2) = N(20000, 2000)$

$$P\left\{\sum_{i=1}^{200} X_i > 20500\right\} = 1 - P\left\{\sum_{i=1}^{200} X_i \leq 20500\right\} \xrightarrow{\text{标准化}} 1 - P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{200} X_i - 20000}{\sqrt{20000}} \leq \frac{20500 - 20000}{\sqrt{20000}}\right\}$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{500}{\sqrt{20000}}\right)$$

PS: 同 $E(X)$ 同 $D(X)$ 同分布 标准化 $\frac{X-\mu}{\sigma}$

例. 某人要测量甲、乙两地之间的距离, 限于测量工具, 他分成 1200 段

进行测量, 每段测量的误差是随机变量, 记为 X_i , 且 $X_i \sim U(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$i=1, 2, \dots, 1200, X_1, X_2, \dots, X_{1200}$ 相互独立, 求总误差的绝对值超过 20 的概率.

$$P\left\{\left|\sum_{i=1}^{1200} X_i\right| > 20\right\} \quad \text{又 } X_i \sim U\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{1200} X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2) = (0, 100)$$

$$E(X) = n \cdot \frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{2} = 0$$

$$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{1}{4}$$

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$= 1 - P\left\{\left|\sum_{i=1}^{1200} X_i\right| \leq 20\right\} = 1 - P\left\{-20 \leq \sum_{i=1}^{1200} X_i \leq 20\right\}$$

$$= 1 - \int_{\frac{-20-0}{\sqrt{100}}}^{\frac{20-0}{\sqrt{100}}} \frac{1}{\sqrt{100}} e^{-\frac{t^2}{200}} dt$$

$$= 1 - [\Phi(2) - \Phi(-2)]$$

$$= 1 - \Phi(2) + [1 - \Phi(2)]$$

$$= 2 - 2\Phi(2)$$

$$\Phi(-2) = 1 - \Phi(2)$$

数理统计

6.1 数理统计的基本概念

1. 总体：研究对象的某项数量指标的全体

个体：组成总体每个基本单位个体

注：总体分有限总体和无限总体

2. 样本

从总体中抽取的部分个体称为样本，记为 $x_1, x_2, \dots, x_n$

若满足：① $x_1, x_2, \dots, x_n$ 相互独立 ② $x_1, x_2, \dots, x_n$ 与总体 X 同分布

则称 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，简称样本。
 n 称为样本容量， $x_1, x_2, \dots, x_n$ 称为样本观测值，简称样本值。

3. 样本分布函数

设总体 X 的分布函数为 $F(x)$ ， $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是来自总体 X 的一个样本。
 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为样本值，把样本值由小到大进行排列，

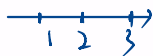
$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$$

定义一个函数：对于任意实数 x ， $F_n(x) = \frac{x_1, x_2, \dots, x_n \text{ 中小于等于 } x \text{ 的个数}}{n}$

称为总体 X 的经验分布函数（或样本分布函数）

例如： $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$ ，则： $F_3(x) = \frac{x_1, x_2, x_3 \text{ 中小于等于 } x \text{ 的个数}}{3} = \begin{cases} 0, & \text{当 } x < 1 \\ \frac{1}{3}, & \text{当 } 1 \leq x < 2 \\ \frac{2}{3}, & \text{当 } 2 \leq x < 3 \\ 1, & \text{当 } x \geq 3 \end{cases}$

注：当 n 充分大时， $F_n(x) \approx F(x)$



4. 统计量: 设 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是总体 X 的一个样本, 样本函数 $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 中不含有任何未知参数, 称 $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为一个统计量.

如: $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$

5. 常用统计量: 设总体 X 的 $E(X) = \mu$, $D(X) = \sigma^2$

(1) 样本均值: $\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$, $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

注: ① $E(\bar{X}) = \mu$ (解释: $E(\bar{X}) = E(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(x_i) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mu = \mu$).

② $D(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$ (解释: $D(\bar{X}) = D(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D(x_i) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$).
 $D(cX) = c^2 D(X)$

(2) 样本方差:

$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$, $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$

注: ① $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} (\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2)$, 类似 $S^2 = \frac{1}{n-1} (\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2)$

修正方差

解释: $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2)$

$= \frac{1}{n-1} (\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} \cdot \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n \bar{x}^2) = \frac{1}{n-1} (\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2)$

$= \frac{1}{n-1} (\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2)$

② $E(S^2) = D(X) = \sigma^2$

小结: $E(\text{样本方差}) = \text{总体方差}$

(3) 样本标准差:

$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$, $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$

(4) 样本 k 阶原点矩:

$A_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k$, $a_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k$

如: -1 阶原点矩: $A_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^1 = \bar{x}$, $= 1$ 阶: $A_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2$

(5) 样本 k 阶中心矩:

$B_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^k$, $b_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^k$

如: $= 2$ 阶中心矩: $B_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$

$$E(x) = \mu, \quad D(x) = \sigma^2$$

样本 $E(\bar{x}) = \mu, \quad D(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}$

原点矩: $\mu_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k$

中心矩: $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^k$

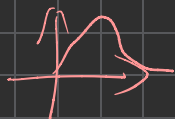
$$E(x^2) = D(x) = \sigma^2$$

样本方差 = 离差平方和

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

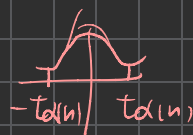
卡方分布: ① 独立 ② 标准正态 ③ $X = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$
 $X \sim \chi^2(n)$

$$E(x) = n, \quad D(x) = 2n$$



t分布: ① $x_1 \sim N(0,1)$ ② $x_2 \sim \chi^2(n)$ ③ 独立

$$T = \frac{x_1}{\sqrt{\frac{x_2}{n}}} \quad \text{即} \quad X \sim t(n)$$



$$E(x) = 0, \quad D(x) = \frac{n}{n-2}$$

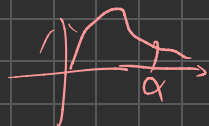
$$-t_{\alpha/2}(n) \quad \downarrow \quad -t_{\alpha/2}(n) = t_{1-\alpha/2}(n)$$

F分布: ① $x_1 \sim \chi^2(n_1)$ $x_2 \sim \chi^2(n_2)$

$$\frac{x_1/n_1}{x_2/n_2} \sim F(n_1, n_2)$$

第一自由度 第二自由度

$$X \sim F(n_1, n_2) \Rightarrow \frac{1}{X} \sim F(n_2, n_1)$$



$$F_{\alpha}(m, n) = \frac{1}{F_{1-\alpha}(n, m)}$$

例：设总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma^2)$ ，总体 $Y \sim N(\mu_2, \sigma^2)$ ， $X_1, X_2, \dots, X_n$ 与 $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ 分

别是来自总体 X 与 Y 的简单样本，则：

$$E \left\{ \frac{1}{n+m-2} \left[\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{j=1}^m (Y_j - \bar{Y})^2 \right] \right\} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$E(\text{样本方差}) = \text{总体方差}$

① $S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$ 又 $E(S^2) = D(X) = \sigma^2$

$E\left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}\right) = \sigma^2 \therefore E\left[\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right] = (n-1)\sigma^2$

② 同理 $E\left(\sum_{j=1}^m (Y_j - \bar{Y})^2\right) = (m-1)\sigma^2$

$\therefore \text{原式} = \frac{1}{n+m-2} [(n-1)\sigma^2 + (m-1)\sigma^2] = \sigma^2$

M
零人在心

6.2 抽样分布

1. 抽样分布：统计量 $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的分布称为抽样分布

2. χ^2 分布 (卡方分布)

定义：设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立且均服从 $N(0, 1)$ 则有 $\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$ 服从自由度为 n 的 χ^2 分布 记为 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$

例如： $X_1 \sim N(0, 1)$ ， $X_2 \sim N(0, 1)$ ，且 X_1, X_2 独立 $\Rightarrow X_1^2 + X_2^2 \sim \chi^2(2)$

$(X_1^2) \sim \chi^2(1)$ ， $(X_2^2) \sim \chi^2(1)$ 。

注：① χ^2 分布三要素：独立，标准正态，平方和；

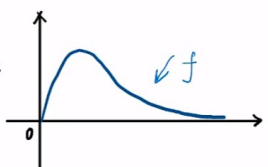
(2) χ^2 分布的密度函数：(3解)

若 $X \sim \chi^2(n)$ ，则 X 的密度函数：

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

其中 $\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \int_0^{+\infty} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-x} dx$

密度 $f(y)$ 的图形：



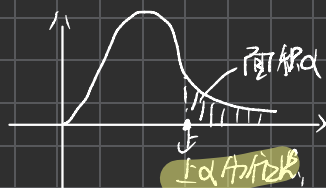
3. 卡方分布性质

① 可加性: 若 $X \sim \chi^2(n_1)$, $Y \sim \chi^2(n_2)$, 则 $X+Y \sim \chi^2(n_1+n_2)$
 $\downarrow$ $\downarrow$
 $X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_{n_1}^2$ $Y_1^2 + Y_2^2 + \dots + Y_{n_2}^2$

② 若 $X \sim \chi^2(n)$ 则 $E(X) = n$, $D(X) = 2n$

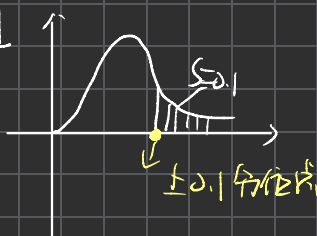
4. χ^2 分布的上 α 分位点

设 $X \sim \chi^2(n)$ 其密度图形:



若 $P\{X > \text{点}\} = \alpha \Rightarrow$ 称此点 $\chi_{\alpha}^2(n)$ 为卡方分布的上 α 分位点

如: $X \sim \chi^2(n)$ 且



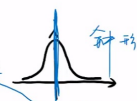
5. t 分布

① 若 $X_1 \sim N(0, 1)$, $X_2 \sim \chi^2(n)$, 则 $X = \frac{X_1}{\sqrt{\frac{X_2}{n}}}$ 服从自由度为 n 的 t 分布, 记为 $X \sim t(n)$

eg: $X_1 \sim N(0, 1)$, $X_2 \sim \chi^2(3)$, 则 $X = \frac{X_1}{\sqrt{\frac{X_2}{3}}} \sim t(3)$

② 若 $X \sim t(n)$, 则

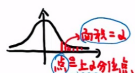
其密度图形, 类似于 $N(0, 1)$:



注: $X \sim t(n)$, 则 $E(X) = 0$, $D(X) = \frac{n}{n-2}$, $n \rightarrow \infty$ $t(n) \sim N(0, 1)$

(4) t 分布的上 α 分位点.

若 $X \sim t(n)$,



若 $P\{X > \text{点}\} = \alpha \Rightarrow$ 称点 $t_{\alpha}(n)$ 为 t 分布的上 α 分位点.



6. F分布

定义: 若 $X_1 \sim \chi^2(n_1)$, $X_2 \sim \chi^2(n_2)$, 独立 $\Rightarrow \frac{X_1/n_1}{X_2/n_2}$ 服从自由度为 $[n_1, n_2]$ 的 F 分布 记为 $F(n_1, n_2)$

第一自由度 第二自由度

eg: $X \sim \chi^2(3)$, $Y \sim \chi^2(4)$ 独立 $\Rightarrow \frac{X/3}{Y/4} \sim F(3, 4)$
“卡方相除得 F”

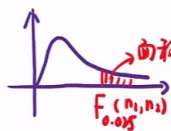
(1) 若 $X \sim F(n_1, n_2)$, 则 $\frac{1}{X} \sim F(n_2, n_1)$

(4) 若 $X \sim F(n_1, n_2)$, 其密度函数图形



若 $P\{X > \text{点}\} = \alpha \Rightarrow$ 则称点 $F_{\alpha}(n_1, n_2)$ 为 F 分布的上 α 分位点。

如: $X \sim F(n_1, n_2)$



$$\Rightarrow P\{X > F_{0.025}(n_1, n_2)\} = 0.025,$$

$$P\{0 < X < F_{0.025}(n_1, n_2)\} = 1 - 0.025 = 0.975$$

注: $F_{\alpha}(m, n) = \frac{1}{F_{1-\alpha}(n, m)}$

例. 设 $X \sim t(n)$, 证明: $X^2 \sim F(1, n)$

$X \sim t(n)$

$$\therefore X = \frac{X_1}{\sqrt{\frac{X_2}{n}}}$$

其中 $X_1 \sim N(0, 1)$, $X_2 \sim \chi^2(n)$ 独立

$\Downarrow$ 上下分子分母同乘

$$X^2 = \frac{X_1^2}{X_2/n} \therefore \text{上下都为卡方分布}$$

$$\therefore X^2 \sim F(1, n)$$

$$\text{或} \frac{1}{X^2} \sim F(n, 1)$$

5. 正态总体的样本均值与样本方差的分布.

(1) 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为总体 X 的一个样本, 则:

① $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$; ② $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$; ③ $\bar{X}$ 与 S^2 独立.

理解: ① $\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n) \sim N(E(\bar{X}), D(\bar{X})) \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

而 $E(\bar{X}) = E(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \mu = \mu$

$D(\bar{X}) = D(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D(X_i) = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^n \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$

③, ④ 证明略.

(2) 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是 X 的样本, 则:

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

解释: $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}) \Rightarrow \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$

而 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$, $\bar{X}$ 与 S^2 独立.

$$\Rightarrow \frac{\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} / (n-1)}} \sim t(n-1)$$

例: 设总体 $X \sim N(0, 1)$, 从中抽取一个容量为 4 的样本 X_1, X_2, X_3, X_4 .

若 $Y = c(X_1 + X_2)^2 + c(X_3 + X_4)^2$, 且 Y 服从 χ^2 分布, 求 c .

解: 由题意: $X_i \sim N(0, 1)$ $i=1, 2, 3, 4$

则: $X_1 + X_2 \sim N(0, 2)$, $X_3 + X_4 \sim N(0, 2)$

$\Rightarrow \frac{(X_1 + X_2) - 0}{\sqrt{2}} \sim N(0, 1)$, $\frac{(X_3 + X_4) - 0}{\sqrt{2}} \sim N(0, 1)$

$$\therefore \left(\frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{X_3 + X_4}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)^2 + \frac{1}{2}(X_3 + X_4)^2 \sim \chi^2(2)$$

$$\therefore c = \frac{1}{2}$$

例. 设 $X_1, X_2, \dots, X_q$ 和 $Y_1, Y_2, \dots, Y_q$ 是来自总体 $N(0, 9)$ 的两个样本, 且这两个样本独立, 求 $U = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_q}{\sqrt{Y_1^2 + Y_2^2 + \dots + Y_q^2}}$ 的分布. (看根号就猜分布)

解: 由题意: $X_i \sim N(0, 9)$, $Y_i \sim N(0, 9)$, $i=1, 2, \dots, q$.

则: $X_1 + X_2 + \dots + X_q \sim N(0, 81) \Rightarrow \frac{(X_1 + X_2 + \dots + X_q)}{9} \sim N(0, 1)$

$Y_i \sim N(0, 9) \xrightarrow{\text{标准化}} \frac{Y_i}{3} \sim N(0, 1), i=1, 2, \dots, q$

$\Rightarrow \frac{Y_1^2}{9} + \frac{Y_2^2}{9} + \dots + \frac{Y_q^2}{9} \sim \chi^2(q).$

$\therefore \frac{(X_1 + X_2 + \dots + X_q)/9}{\sqrt{\frac{Y_1^2 + Y_2^2 + \dots + Y_q^2}{9}}} \sim t(q) \Rightarrow U = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_q}{\sqrt{Y_1^2 + Y_2^2 + \dots + Y_q^2}} \sim t(q)$

7.1 点估计

定义: 设总体 X 的分布形式已知, 但含有未知参数 θ , 用样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 构造统计量 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 来估计未知参数 θ , 称 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为 θ 的点估计量, $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为点估计值.

如: 总体 $X \sim U(0, \theta)$, θ 未知, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为样本.

① 一方面: $E(X) = \frac{\theta}{2}$; ② 另一方面: $\bar{X} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$

令 $E(X) = \bar{X}$ 得: $\frac{\theta}{2} = \bar{X} \Rightarrow \hat{\theta} = 2\bar{X}$ 为 θ 的点估计量.

总体矩

样本矩

2. 矩估计 (点估计方法) 最大似然

① 基本思想: 用样本矩 $A_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$ 代替总体矩 $U_k = E(X^k)$

② 基本步骤

1. 先求总体矩 $E(X)$

2. 再令 $\bar{X} = E(X)$, 解得 $\hat{\theta}$ 即为矩估计量

题型 求期望计算

(2) 求 $E(x)$

$$\textcircled{2} \text{ 令 } \bar{x} = E(x) \Rightarrow \hat{\theta} = \dots \bar{x}$$

例. 设总体 $X \sim f(x; \theta) = \begin{cases} (0+1)x^\theta, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, $\theta > -1$ 的未知参数, $x_1, x_2, \dots, x_n$

是来自总体 X 的样本, 求 θ 的矩估计量.

① 先求 $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^1 x (0+1)x^\theta dx = \frac{\theta+1}{\theta+2}$, $0 < x < 1$
(矩估计) $\int_0^1 x (0+1)x^\theta dx = \frac{\theta+1}{\theta+2}$ 其他.

② 令 $\bar{X} = E(X)$
 $= \frac{\theta+1}{\theta+2} \Rightarrow \theta = \frac{1-2\bar{X}}{\bar{X}-1}$ 为矩估计量

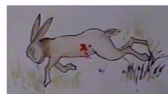
3. 最大似然估计

(1) 基本思想:

举例: 一位猎人与一个学生去野外打猎, 突然一只兔子从面前经过, 只听一声枪响, 兔子应声倒下, 问: 这一枪是谁打中的呢?

(如果只命中一枪, 猎人命中的概率较大, 则推测这一枪是猎人打中的.)

——“所见即最大”



最大似然估计的基本思想: 使得当前样本 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 出现概率最大的参数值 θ 即为最大似然估计

似然函数: 一种刻画样本 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 出现的概率大小的函数

① 离散型:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = P\{X_1=x_1, X_2=x_2, \dots, X_n=x_n\}$$

$$= P\{X=x_1\} \cdot P\{X=x_2\} \cdot \dots \cdot P\{X=x_n\} \quad (\text{相互独立})$$

② 连续型:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = f(x_1; \theta) \cdot f(x_2; \theta) \cdot \dots \cdot f(x_n; \theta) \quad (\text{密度独立})$$

基本步骤

连续型连加, 方便算

① 写出似然函数 $L(\theta) \rightarrow$ ② 取对数 $\ln L(\theta) \rightarrow$ ③ 求导, 得驻点, 驻点 θ 即为最大似然估计

例. 设总体 $X \sim P(\lambda)$, $\lambda > 0$ 且未知, 其分布律: $P\{X=k\} = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$, $k=0,1,\dots$

$X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的一个样本, 求 λ 的最大似然估计.

① 写 $L(\lambda)$ (离散, 概率连乘)

$$L(X_1, X_2, \dots, X_n; \lambda) = P(X_1=X_1) \cdot P(X_2=X_2) \cdots P(X_n=X_n) \\ = \frac{\lambda^{X_1} \cdot e^{-\lambda}}{X_1!} \cdot \frac{\lambda^{X_2} \cdot e^{-\lambda}}{X_2!} \cdots \frac{\lambda^{X_n} \cdot e^{-\lambda}}{X_n!} = \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n X_i} \cdot e^{-n\lambda}}{X_1! \cdot X_2! \cdots X_n!}$$

② 取对数

$$\ln L(\lambda) = \sum_{i=1}^n X_i \ln \lambda - n\lambda - \ln(X_1! \cdot X_2! \cdots X_n!)$$

③ 对 λ 求导

$$\frac{d \ln L(\lambda)}{d \lambda} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\lambda} - n = 0 \Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = \bar{X} \quad \therefore \hat{\lambda} = \bar{X} \text{ 为最大似然估计量}$$

例. 设总体 $X \sim f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{\theta^2}{x^3} e^{-\frac{\theta}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$, $\theta > 0$ 且未知, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自

总体 X 的样本, 求 θ 的最大似然估计.

$$\textcircled{1} L(\theta) = f(X_1, \theta) \cdot f(X_2, \theta) \cdots f(X_n, \theta) \\ = \frac{\theta^2}{X_1^3} e^{-\frac{\theta}{X_1}} \cdot \frac{\theta^2}{X_2^3} e^{-\frac{\theta}{X_2}} \cdots \frac{\theta^2}{X_n^3} e^{-\frac{\theta}{X_n}} \\ = \theta^{2n} e^{-\theta \sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i}} (X_1 \cdots X_n)^{-3}$$

$$\textcircled{2} \ln L(\theta) = 2n \ln \theta - \theta \sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i} - 3 \ln(X_1 \cdots X_n)$$

$$\textcircled{3} \text{ 求导: } \frac{2n}{\theta} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i} = 0$$

$$\Rightarrow \hat{\theta} = \frac{2n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i}}$$

$\therefore \hat{\theta} = \frac{2n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i}}$ 为最大似然估计量

7.2 估计量的评选标准

1. 无偏性

设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的一个样本, $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为未知参数 θ 的估计量, 若 $E(\hat{\theta}) = \theta$, 则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的无偏估计量. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{\theta}) = \theta$ 则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的渐近无偏估计量.

例. 设总体 X 的 $E(X) = \mu$, μ 未知, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是取自总体的一个样本, 判断

$\hat{\mu}_1 = \frac{X_1}{2} + \frac{X_2}{2}$, $\hat{\mu}_2 = \frac{1}{3}X_1 + \frac{2}{3}X_2$ 是否为 μ 的无偏估计量?

解: ① $E(\hat{\mu}_1) = E(\frac{X_1}{2} + \frac{X_2}{2}) = \frac{1}{2}E(X_1) + \frac{1}{2}E(X_2) = \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\mu = \mu$
 $\therefore \hat{\mu}_1$ 是 μ 的无偏估计. ② $E(\hat{\mu}_2) = E(\frac{1}{3}X_1 + \frac{2}{3}X_2) = \frac{1}{3}E(X_1) + \frac{2}{3}E(X_2) = \frac{1}{3}\mu + \frac{2}{3}\mu = \mu$

$\therefore \hat{\mu}_2$ 不是 μ 的无偏估计. 有偏估计



小结: $aX_1 + bX_2$ 是 μ 无偏估计 $\Leftrightarrow a+b=1$ (系数之和为1)

例. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是取自总体 X 的一个样本, $E(X) = \mu$, $D(X) = \sigma^2$, 求 c .

若 $c \sum_{i=1}^n (X_{(n)} - X_i)^2$ 为 σ^2 的无偏估计量, 求 c .

解: 由题意: $E[c \sum_{i=1}^n (X_{(n)} - X_i)^2] = \sigma^2$
 $\Rightarrow c \sum_{i=1}^n [E(X_{(n)}^2) - 2E(X_{(n)} \cdot X_i) + E(X_i^2)] = \sigma^2$
 $\downarrow$
 X_i 都服从同一分布 $X_i, X_{(n)}$ 独立 $D(X) = \sigma^2$
 $E(X_{(n)}^2) = E(X_i^2) = D(X) + E(X)^2 = \sigma^2 + \mu^2$
 $E(X_i^2) = \sigma^2 + \mu^2$
 $E(X_{(n)} \cdot X_i) = E(X_{(n)})E(X_i) = \mu^2$
 $\therefore c \sum_{i=1}^n (\sigma^2 + \mu^2 - 2\mu^2 + \sigma^2 + \mu^2) = \sigma^2$
 $\Rightarrow c \sum_{i=1}^n 2\sigma^2 = \sigma^2$
 $\Rightarrow c(n-1)2\sigma^2 = \sigma^2$
 $\Rightarrow c = \frac{1}{2(n-1)}$

2. 有效性

设 $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(X_1, X_2, \dots, X_n)$, $\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 均为未知参数 θ 的估计量, 若 $D(\hat{\theta}_1) \leq D(\hat{\theta}_2)$, 则称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 更有效

例. 设 X_1, X_2 是取自总体 $X \sim N(\mu, 1)$ 的样本, μ 未知, 问下面三个估计量哪一个更有效: $\hat{\mu}_1 = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2$, $\hat{\mu}_2 = \frac{1}{4}X_1 + \frac{3}{4}X_2$, $\hat{\mu}_3 = \frac{1}{3}X_1 + \frac{2}{3}X_2$?

$\therefore \hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\mu}_3$ 的系数和都为 1.
 $\therefore$ 都是无偏估计量
 $D(\hat{\mu}_1) = D(\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2) = \frac{1}{4}D(X_1) + \frac{1}{4}D(X_2) = \frac{1}{4}$
 $D(\hat{\mu}_2) = D(\frac{1}{4}X_1 + \frac{3}{4}X_2) = \frac{1}{16}D(X_1) + \frac{9}{16}D(X_2) = \frac{5}{16}$
 $D(\hat{\mu}_3) = D(\frac{1}{3}X_1 + \frac{2}{3}X_2) = \frac{1}{9}D(X_1) + \frac{4}{9}D(X_2) = \frac{5}{9}$
 $\therefore D(\hat{\mu}_1) < D(\hat{\mu}_2) < D(\hat{\mu}_3)$

3. 一致性 (相合性) (1) 解)

框框老师

设 $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为未知参数 θ 的估计量, 若对于任意正数 ε , 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\hat{\theta}_n - \theta| < \varepsilon\} = 1$, 即 $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$, 则称 $\hat{\theta}_n$ 为 θ 的一致估计.

注: 若 $E(\hat{\theta}_n) \rightarrow \theta$, 且 $D(\hat{\theta}_n) \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$) $\Rightarrow$ 则 $\hat{\theta}_n$ 为 θ 的一致估计.

例. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 来自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 问 $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 是否为 σ^2 的一致估计?

解: $E(S^2) = D(X) = \sigma^2$, 而 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \Rightarrow D\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right) = 2(n-1)$

$$\Rightarrow \frac{(n-1)}{\sigma^4} D(S^2) = 2(n-1) \Rightarrow D(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1} \rightarrow 0 \text{ (当 } n \rightarrow \infty)$$

故 S^2 是 σ^2 的一致估计量.

7.3 区间估计

1. 置信区间

设总体 X 的分布中含有未知参数 θ , $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自 X 的样本, 若对于给定的 α 存在 $\hat{\theta}_1$ 与 $\hat{\theta}_2$, 使得 $P\{\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2\} = 1 - \alpha$, 则称 $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ 关于 θ 的置信区间, $1 - \alpha$ 为置信水平.

PS: ① 置信区间的含义: $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ 包含真值 θ 的概率为 $1 - \alpha$

② 单侧置信区间

- 若 $P\{\theta \leq \hat{\theta}_2\} = 1 - \alpha \Rightarrow (-\infty, \hat{\theta}_2)$ 为 θ 的单侧置信区间
- 若 $P\{\theta > \hat{\theta}_1\} = 1 - \alpha \Rightarrow (\hat{\theta}_1, +\infty)$ 为 θ 的单侧置信区间

例 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ 未知, σ^2 已知, 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自 X 的样本.

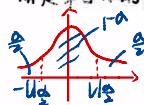
求 μ 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的置信区间.

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \xrightarrow{\text{标准化}} \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

$$\uparrow \text{样本均值} \Rightarrow P\left\{-u_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < u_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1 - \alpha$$

$$\text{由 } -u_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < u_{\frac{\alpha}{2}} \text{ 解得 } \bar{X} - u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\text{即 } \mu \in \left(\bar{X} - u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \text{ 记为 } \left(\bar{X} \pm u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$



① 先 $X \sim N$
 $\rightarrow$ 标准化

② 令 $U \sim N(0, 1)$

③ 求出 $u_{\alpha/2}$

2. 基本步骤:

- (1) 构造样本 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 和未知参数 θ 的函数 $J = J(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)$, 且 J 的分布已知; 枢轴量
都有一个未知参数 θ
- (2) 对于给定的置信水平 $1-\alpha$, 利用 J 的分布, 确定两个常数 a, b , 使得 $P\{a < J < b\} = 1-\alpha$;
- (3) 由 $a < J < b$, 即 $a < J(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) < b$ 解得 θ 的范围 $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ 即为 θ 的 $1-\alpha$ 水平下的置信区间。

3. 当正态总体方差 σ^2 已知时, 均值 μ 的置信区间

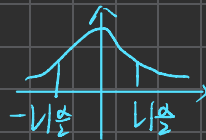
设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ 未知, σ^2 已知, 求 μ 置信区间

1° 构造枢轴量

$$J(x_1, x_2, \dots, x_n; \mu) = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

2° 对于置信水平 $1-\alpha$, 由 $J \sim N(0, 1)$

$$\text{得 } P\{-1/\alpha < J < 1/\alpha\} = 1-\alpha$$



$$\text{3° 由 } -1/\alpha < J < 1/\alpha \Rightarrow -1/\alpha < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < 1/\alpha$$

$$\bar{X} \pm 1/\alpha$$

$$\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot 1/\alpha < \mu < \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot 1/\alpha$$

例. 从正态总体 $N(\mu, 1)$ 中抽取容量 $n=16$ 的样本, 样本均值

$\bar{x} = 5.2$, 求 μ 的置信水平为 95% 的置信区间。

$$1-\alpha = 0.95$$

总体 $X \sim N(\mu, 1)$, σ^2 已知, 则 μ 的置信区间:

$$\mu \in (\bar{x} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot 1/\alpha) = (\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot 1/\alpha, \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot 1/\alpha)$$

$$\text{又 } 1-\alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05, \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

$$\bar{x} = 5.2, \sigma = 1, n = 16, 1/\alpha = 1/0.025 = 1.96 \text{ 代入得}$$

$$= (\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot 1.96, \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot 1.96)$$

$$= (4.71, 5.69)$$

4. 当正态总体方差 σ^2 未知时, 均值 μ 的置信区间 (σ^2 未知)
 分布是t分布
 和标准正态相似

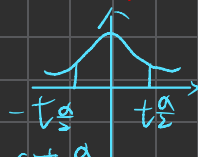
1° 构造枢轴量

$$J(X_1, X_2, \dots, X_n; \mu) = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

$\because \sigma^2$ 未知 $\therefore$ 用 $S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$

2° 对于置信水平 $1-\alpha$, 由 $J \sim t(n-1)$

$$\text{得 } P\{-t_{\frac{\alpha}{2}} < J < t_{\frac{\alpha}{2}}\} = 1-\alpha$$



$$3^\circ \text{ 由 } -t_{\frac{\alpha}{2}} < J < t_{\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow -t_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} < t_{\frac{\alpha}{2}}$$

$$\Rightarrow \mu \in \left(\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}, \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}} \right)$$

例. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 未知, 从总体中抽取容量 $n=16$ 的样本, 框框老师

其中 $\bar{x}=2.8$, $S=3.0$, 求 μ 的置信水平为 95% 的置信区间.

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 未知, 则 μ 的置信区间

$$\mu \in \left(\bar{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \right)$$

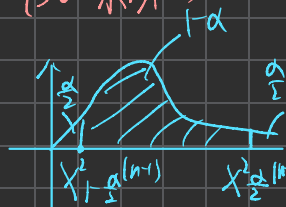
$$\text{又 } 1-\alpha=0.95 \Rightarrow \alpha=0.05, t_{\frac{\alpha}{2}}=t_{0.025}(15) \stackrel{\text{查表}}{=} 2.131$$

$$\therefore \mu \in \left(\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1), \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \right) = (1.2, 4.4)$$

5. 当正态总体 μ 未知, 方差 σ^2 的置信区间 (μ 未知)

1° 构造枢轴量

$$J(X_1, X_2, \dots, X_n; \sigma^2) = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$



2° 对于置信水平 $1-\alpha$, 由 $J \sim \chi^2(n-1)$

$$\text{得 } P\{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}} < J < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}\} = 1-\alpha$$

$$3^\circ \text{ 由 } \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}} < J < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}$$

例. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ 未知, 从总体中抽取容量 $n=20$ 的样本, $S^2=9.67$. 求 σ^2 的置信水平为 0.95 的置信区间.

解: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ 未知, 则 σ^2 的置信区间:

$$\sigma^2 \in \left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)} \right)$$

置信水平 $1-\alpha=0.95 \Rightarrow \alpha=0.05 \Rightarrow \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1) = \chi_{0.025}^2(19) = 32.852$

$\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1) = \chi_{0.975}^2(19) = 8.907 \Rightarrow \sigma^2 \in \left(\frac{15S^2}{\chi_{0.025}^2(19)}, \frac{15S^2}{\chi_{0.975}^2(19)} \right) = (5.593, 20.68)$

假设检验 [正态总体下均值 μ 的假设检验 (Z 检验, T 检验)]

某车间用一台机器包装食盐, 在正常情况下, 每袋食盐质量 $X \sim N(500, 15^2)$, 某日开工后, 为了检验包装机是否正常, 抽取 $n=9$ 袋盐 $\bar{x}=511.22g$, 问机器是否正常呢? ($\alpha=0.01$)

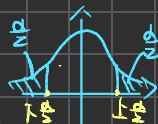
分析: 正态总体下均值 μ 的检验

① 提出假设: $H_0: \mu = \mu_0$ (原假设) $H_1: \mu \neq \mu_0$ (对立假设)

② 选检验统计量 $\begin{cases} \text{① 当 } \sigma^2 \text{ 已知, 选 } \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1) \text{ (Z 检验)} \\ \text{② 当 } \sigma^2 \text{ 未知, 选 } \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1) \text{ (T 检验)} \end{cases}$

③ 得到拒绝域: ① $W = (-\infty, -|u_{\frac{\alpha}{2}}|) \cup (|u_{\frac{\alpha}{2}}|, +\infty)$ (两边小概率)

② $W = (-\infty, -t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)) \cup (t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1), +\infty)$



④ 作出检验: 代入 $\bar{x}$, S 得统计量的值, 若该值 $\in W$ 则拒绝 H_0

1. 正态总体下均值 μ 的假设检验 (U 检验, T 检验)

例. 某车间用一台机器包装食盐, 在正常情况下, 每袋食盐质量 $X \sim N(500, 15^2)$, 某日开工后, 为了检验包装机是否正常工作, 抽取 $n=9$ 袋盐, $\bar{x}=511.22$ g, 问机器是否正常工作? ($\alpha=5\%$)

解: 1° 提出假设: $H_0: \mu = \mu_0 = 500$ (机器正常); $H_1: \mu \neq \mu_0$

2° 选统计量: $\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$

3° 得拒绝域: $W = (-\infty, -U_{\alpha/2}) \cup (U_{\alpha/2}, +\infty)$ $\alpha=0.05$ $\therefore U_{0.025} \approx 1.96$
 $= (-\infty, -1.96) \cup (1.96, +\infty)$

4° 把样本均值 $\bar{x}=511.22$ 代入 $\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{511.22 - 500}{15/\sqrt{9}} = 2.244$
 $2.244 > 1.96 \therefore$ 落入拒绝域: 拒绝 H_0
 机器不正常

2. 正态总体下方差 σ^2 的检验 (χ^2 检验)

例. 某工厂的罐装饮料要求方差 $\sigma_0^2 = 0.0004$, 抽取 $n=20$ 罐饮料, 得

$S=0.03$, 设罐装量服从正态分布, 问: 在 $\alpha=0.05$ 下, 能否认为饮料达到要求.

1° 提出假设: $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 = 0.0004$, $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

2° 选统计量: $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$ (χ^2 检验法)

3° 得拒绝域: $W = (0, \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)) \cup (\chi^2_{\alpha/2}(n-1), +\infty)$
 $= (0, \chi^2_{0.975}(19)) \cup (\chi^2_{0.025}(19), +\infty)$
 $= (0, 8.907) \cup (32.852, +\infty)$

4° 计算 $S=0.03$, $\chi^2 = \frac{19 \cdot 0.03^2}{0.0004} = 42.75 > 32.8 \therefore$ 拒绝 H_0 : 不能达到要求

